

Felipe dos Passos

FORMALISMO DE VLASOV COVARIANTE APLICADO A MODELOS EFETIVOS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção do
Grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Passos, Felipe dos

Formalismo de Vlasov covariante aplicado a modelos
efetivos / Felipe dos Passos ; orientador, Sidney dos
Santos Avancini - Florianópolis, SC, 2014.
104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

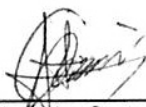
Inclui referências

1. Física. 2. Função de Wigner Covariante. 3. Modelos
Efetivos. 4. Aproximação Semi-Clássica. 5. Relações de
Dispersão. I. Avancini, Sidney dos Santos . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Física. III. Título.


FORMALISMO DE VLASOV COVARIANTE APLICADO A MODELOS EFETIVOS

Felipe dos Passos

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **MESTRE EM FÍSICA**, na área de concentração de **Física Nuclear e de Hádrons** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



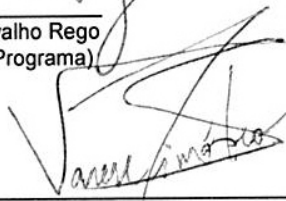
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(UFSC - orientador)



Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego
(FSC/UFSC - Coordenador do Programa)



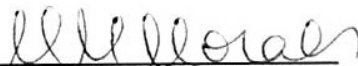
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(UFSC - presidente)



Prof. Dr. Varese Salvador Timoteo
(membro externo) - UNICAMP



Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
(membro titular) - FSC/UFSC



Prof. Dr. Marilena-Matiko Watanabe de
Moraes
(membro titular) - FSC/UFSC



Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
(membro titular) - FSC/UFSC

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família por sempre me apoiar nas minhas decisões. Em especial agradeço à minha mãe, Sandra, e meu pai, Silézio por sua confiança no meu sucesso, à minha linda esposa, Jade, pela compreensão e carinho, aos meus irmãos, Fernanda e Fernando, pela presença indispensável na minha vida e à minha avó, Maria, pelo seu infindável amor. Agradeço também ao meu orientador, Sidney dos Santos Avancini, por me guiar durante estes dois anos de mestrado, além de quatro anos de graduação. Sem sua ajuda, seus conselhos, seu trabalho árduo, e seu senso de humor esta dissertação não existiria. Finalmente agradeço a Capes por possibilitar que eu me dedicasse aos estudos e me aplicasse ao máximo nesta dissertação.

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo sistemático dos usos do formalismo de Vlasov e sua aplicação à matéria nuclear a partir da Função de Wigner, que será estudada extensivamente no desenvolvimento deste trabalho. Entre as propriedades que podem ser calculadas, estamos especialmente interessados nas relações de dispersão a que a matéria nuclear descrita pelo modelo $\sigma - \omega - \rho$ obedece. Resultados para as relações de dispersão já foram obtidos em um artigo usando a função de Wigner, embora com um formalismo diferente, conhecido como função geratriz. Como será mostrado, os resultados para ambos os casos são idênticos, fato que comprova a viabilidade do formalismo de Vlasov. Este trabalho é um estudo introdutório e aborda a base necessária para a aplicação do formalismo de Vlasov nas mais diversas situações.

Palavras-chave: Função de Wigner, Função de Wigner Covariante, Função de Wigner de Equilíbrio, Álgebra de Clifford, Aproximação Semi-Clássica, Modelos Efetivos, Equação de Vlasov, Relações de Dispersão.

ABSTRACT

This work consists in a systematic study on the Vlasov formalism uses and its application to nuclear matter using the Wigner function, which will be studied extensively in this work. Among the properties that can be calculated, we are particularly interested in the dispersion relations that the nuclear matter described by the model $\sigma - \omega - \rho$ obeys. Results for the dispersion relations have been obtained in one paper using the Wigner function, although with a different formalism, known as generating function. As will be shown, the results for both cases are identical, fact that proves the viability of the Vlasov formalism. This work is an introductory study and approach the necessary basis for the application of the Vlasov formalism in different situations.

Keywords: Wigner Function, Covariant Wigner Function, Equilibrium Wigner Function, Clifford Algebra, Semi-Classical Aproximation, Effective Models, Vlasov Equations, Dispersion Relations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 FUNÇÃO DE WIGNER	17
2.1 FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO	17
2.2 FUNÇÃO DE WIGNER: PROPRIEDADES	20
3 FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE	27
3.1 FUNÇÃO DE WIGNER PARA PARTÍCULAS DE SPIN 1/2	27
3.2 CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE	30
3.3 EQUAÇÕES BÁSICAS	31
3.4 REPRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NA ÁLGEBRA DE CLIFFORD	32
3.5 DECOMPOSIÇÃO SPINORIAL	33
3.6 APROXIMAÇÃO DE SPIN SATURADO	36
3.7 SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA E HOMOGÊNEA	37
3.8 APROXIMAÇÃO SEMI-CLÁSSICA	39
4 APLICAÇÃO DO FORMALISMO DE WIGNER COVARIANTE	41
4.1 MODELO $\sigma - \omega - \rho$	41
4.2 EQUAÇÃO DE VLASOV	43
4.3 RELAÇÕES DE DISPERSÃO (T=0)	47
4.4 ONDAS LONGITUDINAIS	56
5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	61
Referências bibliográficas	66
Apêndice A – Cálculos da Seção 2.2	67
Apêndice B – Cálculos das Seções 3.1 e 3.3	75
B.1 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.5)	75
B.2 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.8)	75
B.3 PROVA DE QUE A EQUAÇÃO (3.13) É IGUAL A EQUAÇÃO (3.8)	75
B.4 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES (3.15) E (3.16)	76
B.5 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.22)	78
Apêndice C – Representação da Função de Wigner	83
Apêndice D – Função de Wigner de Equilíbrio	89
Apêndice E – Cálculo da equação (4.11)	93
Apêndice F – Cálculos da Seção 4.2	99
F.1 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (4.16)	99
F.2 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES (4.20) E (4.21)	100

F.3	CÁLCULO DOS COMUTADORES (4.25) E (4.26)	101
-----	---	-----

1 INTRODUÇÃO

Modelos efetivos relativísticos para a interação forte vêm sendo usados de forma extensiva nas últimas décadas, devido ao fato de serem mais maleáveis que a cromodinâmica quântica. Eles são usados para estudar transições de fase, descrever núcleos estáveis e instáveis e, com a parametrização adequada, podem descrever até mesmo objetos estelares de interesse, como estrelas de nêutrons e supernovas. Portanto o seu estudo e o desenvolvimento de um método sistemático para abordar estes modelos ainda é um ponto relevante na física nuclear.

Os métodos mais tradicionais para o tratamento de tais modelos envolvem técnicas de teoria de campos. Embora sejam frutíferos, estes métodos apresentam algumas desvantagens. Primeiramente, eles são de difícil sistematização, ou seja, cada caso apresenta um tipo diferente de solução, o que dificulta uma abordagem unificada. Além disso, dependendo da técnica utilizada, é relativamente difícil de realizar uma comparação entre os resultados obtidos e seus pares clássicos, quando existir esta possibilidade.

Tendo em vista estas limitações este trabalho trata de outro método, bem menos abordado pela literatura. Ele consiste na aplicação das chamadas funções de quasiprobabilidade para os modelos efetivos. Diferentemente das técnicas de teoria de campos, o método de Wigner consiste numa análise sistemática das propriedades do sistema. Isto funciona tão bem que, após feita a análise da teoria mais simples possível (férmions livres), sua generalização para casos mais complexos é relativamente simples, contendo apenas pequenas modificações. Este fato será observado na seção 3.1.

Além da sistematização, o método de Wigner também permite uma direta comparação com os resultados clássicos, pois ele gera resultados de formato semelhante ao clássico. Assim uma rápida análise diz quais efeitos são exclusivamente quânticos, sem a necessidade de grandes esforços matemáticos e teóricos.

O desenvolvimento deste arcabouço teórico permitirá sua aplicação a diversos modelos efetivos, além do tratado nesta dissertação. A expansão dos resultados obtidos aqui para casos diferentes, embora seja ocasionalmente trabalhosa, ocorre de maneira direta, já que a metodologia continua intacta. As principais diferenças residem nas funções a serem integradas, ou seja, há uma diferença no cálculo a ser efetuado, mas os princípios continuam válidos.

Neste trabalho estamos interessados, principalmente, na possível existência de instabilidades na matéria bariônica. Desejamos saber se tais instabilidades existem e, em caso afirmativo, quais seus efeitos nas propriedades

do sistema. Para fazê-lo é necessário de um estudo detalhado das relações de dispersão do sistema. Muitos métodos existem para a obtenção de tais relações. Aqui iremos utilizar a função de Wigner através do formalismo de Vlasov. Este arcabouço teórico permite-nos obter valores esperados relevantes do sistema, tais como o valor esperado da quadricorrente e dos campos envolvidos. A partir destes observáveis é relativamente direto a obtenção das relações de dispersão do sistema.

O capítulo 2 dedica-se a uma revisão histórica da função de Wigner não covariante, suas propriedades e definições. Além disso faz uma breve discussão sobre as funções de quasiprobabilidade existentes, suas características e aplicações. Esta revisão histórica dá-se através dos clássicos trabalhos de Wigner [1] [2], de Weyl [3], de Moyal [4], de O'Connell [5], referências pioneiras que formalizaram a área da estatística quântica. Além disso mostramos o motivo que torna a função de Wigner tão popular na literatura através das suas propriedades.

O capítulo 3 dedica-se ao desenvolvimento de uma função de Wigner manifestamente covariante. A definição é obtida de maneira semelhante a proposta por Carruthers e Zachariasen [6], modificada por Hakim [7] [8], além de ser discutida num contexto mais moderno no livro do mesmo autor [9]. Partimos dos observáveis e , d , obtemos uma forma para a função de Wigner, bem como a representação dos operadores. A função de Wigner torna-se uma matriz 4×4 com propriedades levemente diferentes do seu par clássico. A equação básica que ela obedece é deduzida. Por ser uma matriz 4×4 , decompomos a função de Wigner na álgebra de Clifford, a fim de analisar o comportamento das diferentes componentes. Um exemplo deste comportamento é a decomposição spinorial, que liga os efeitos do spin a uma componente particular da álgebra. Finalmente obtemos a função de Wigner de equilíbrio e analisamos a validade da aproximação semi-clássica para situações próximas ao equilíbrio.

Finalmente no capítulo 4, os conhecimentos desenvolvidos no capítulo 3 são aplicados ao modelo $\sigma - \omega - \rho$. A escolha deste modelo dá-se pelo fato de haver na literatura um artigo [10] que obtém as relações de dispersão para a matéria nuclear descrita por tal modelo. Estas relações são obtidas através de um formalismo diferente, embora ainda usando a função de Wigner, o que torna o artigo [10] uma boa fonte para a comparação dos nossos resultados. Após reobtermos as equações e propriedades desenvolvidas no capítulo 3, agora aplicadas ao caso em estudo, somos capazes de obter a relação de dispersão para pequenas perturbações do equilíbrio, região onde a aproximação semi-clássica é válida.

Ao fim do capítulo 4 consideramos um caso particular de interesse físico, as ondas longitudinais. Para este caso é possível obter analiticamente a relação de dispersão que o sistema obedece. Ao fazê-lo, vemos que o nosso resultado concorda com o resultado teórico já obtido em [10] através do formalismo de função geradora. Esta concordância valida o uso do formalismo de Vlasov para o tratamento da função de Wigner, objetivo principal deste trabalho. Com a formalização dos conceitos para o caso mais simples do modelo $\sigma - \omega - \rho$ estamos preparados para a continuação da pesquisa rumo a modelos mais complexos.

2 FUNÇÃO DE WIGNER

2.1 FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Diferentemente da mecânica clássica, na mecânica quântica o conceito de espaço de fase é extremamente problemático. Esta dificuldade reside no princípio de incerteza de Heisenberg, que afirma ser impossível que uma partícula possua a sua posição q e seu momento p bem definidos simultaneamente. Portanto não é possível definir uma distribuição de espaço de fase para um sistema quântico, como é feito na mecânica estatística clássica.

Mesmo assim existem funções que possuem características próximas aquelas da função de distribuição clássica. A esta classe de funções damos o nome de funções de distribuição de quasiprobabilidade. Além de serem muito úteis, fornecendo um método sistemático para a obtenção das propriedades de um sistema, também evidenciam como a mecânica quântica e clássica se conectam, já que muitos resultados são similares aos clássicos.

Seja um sistema clássico descrito pela distribuição no espaço de fase $P_{Cl}(q, p)$. A média de uma função qualquer $A(q, p)$ é dada:

$$\langle A \rangle_{Cl} = \iint dq dp A(p, q) P_{Cl}(q, p). \quad (2.1)$$

Aqui e no restante do trabalho integrais sem limite de integração explícitos devem ser assumidas como de $-\infty$ a $+\infty$, bem como os operadores serão diferenciados de seus pares clássicos através do acento circunflexo.

Agora para o caso de um sistema quântico, a média de uma função dos operadores posição e momento, $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$, é dada:

$$\langle \hat{A} \rangle_{quant} = \iint dq dp A(p, q) P_q(q, p) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}(\hat{q}, \hat{p})), \quad (2.2)$$

onde $A(q, p)$ é derivada do operador $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ através de uma regra bem definida. Esta metodologia permite apresentar os resultados quânticos de uma maneira semelhante à clássica.

A primeira distribuição de quasiprobabilidade foi introduzida por Wigner [1] a fim de estudar as correções quânticas à mecânica estatística clássica. Esta, que passou a ser denominada como função de Wigner, atua como uma reformulação da mecânica quântica de Schrödinger. Enquanto na formulação de Schrödinger a descrição dá-se através de funções no espaço

de configuração, o método de Wigner utiliza o espaço de fase quântico. Vale ressaltar que o uso do espaço de configuração para sistemas de muitas partículas é problemático. Denominaremos a função de Wigner por F e utilizaremos a regra de derivação de um operador qualquer $\hat{A} \rightarrow A$ proposta por Weyl [3] e considerada como consistente por Moyal [4].

As funções de quasiprobabilidade não são unicamente definidas e, na verdade, há uma ampla variedade de funções, cada qual com sua aplicação. Em ótica quântica, área em que a aplicação das funções de distribuição quântica encontrou grande êxito e ampla aplicação, pode-se destacar as conhecidas representações P de Glauber [11] e Sudarshan [12]. Entre as suas principais características estão a covariância por transformações de Lorentz e sua facilidade em lidar com campos eletromagnéticos. Além destas, é possível destacar as distribuições de Hussimi [13], Margenau e Hill [14], Cohen [15] e as representação P generalizada de Drummond, Gardiner e Walls [16, 17]. Embora estejam entre as mais usadas, seu campo de aplicação é muito limitado, quando comparada com a função de Wigner ou as representações P .

Considerando um sistema unidimensional composto por uma partícula e descrito por uma matriz densidade $\hat{\rho}$, deseja-se construir um análogo quântico à função distribuição de espaço no fase clássica. O primeiro palpite de alguém experiente em mecânica quântica seria usar, de alguma forma, as distribuições de posição e momento, já que estas representam probabilidades. Partindo deste princípio, temos para posição:

$$P_{pos}(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \quad (2.3)$$

$$= \int dq' \langle q' | \hat{\rho} \delta(q - \hat{q}) | q' \rangle, \quad (2.4)$$

onde definimos:

$$\delta(q - \hat{q}) | q' \rangle \doteq | q \rangle \langle q | q' \rangle = \delta(q - q') | q' \rangle. \quad (2.5)$$

Assim:

$$P_{pos}(\hat{q}) = \text{Tr}(\hat{\rho} \delta(q - \hat{q})). \quad (2.6)$$

De maneira semelhante, obtêm-se para o momento:

$$P_{mom} = \langle p | \hat{p} | p \rangle \quad (2.7)$$

$$P_{mom} = \text{Tr}(\hat{p} \delta(p - \hat{p})). \quad (2.8)$$

Cada uma destas funções são distribuições no espaço de configuração e momento respectivamente. Portanto, como primeira tentativa para obtenção de uma função de distribuição no espaço de fase podemos considerar uma combinação de ambas as funções, como por exemplo:

$$P_1(q, p) = \text{Tr}(\hat{p} \delta(q - \hat{q}) \delta(p - \hat{p})), \quad (2.9)$$

$$P_2(q, p) = \text{Tr}(\hat{p} \delta(p - \hat{p}) \delta(q - \hat{q})), \quad (2.10)$$

ou uma combinação de ambas. Embora estas funções possam ser usadas para o cálculo de valores esperados de funções de \hat{q} e \hat{p} , desde que devidamente ordenadas, elas não são boas escolhas para uma distribuição no espaço de fase, pois lhes faltam propriedades desejáveis que outras funções, como a de Wigner, possuem. Mais adiante veremos quais são estas características. Além disso, P_1 e P_2 são, em geral, quantidades complexas. Desta pequena discussão vemos que, apesar de ser relativamente simples obter uma função de quasiprobabilidade, a obtenção de uma função apropriada e com características desejáveis é um trabalho mais complexo que apenas um palpite educado.

Além de ser ferramenta no cálculo de valores esperados de funções dos operadores \hat{q} e \hat{p} , as funções de quasiprobabilidade também podem ser usadas de maneira análoga com funções dos operadores aniquilação (\hat{a}) e criação (\hat{a}^\dagger), o que a torna uma poderosa técnica em problemas envolvendo campos eletromagnéticos. Esta técnica é mais bem sucedida que as técnicas de teoria de campos tradicionais, justificando o amplo uso das funções de distribuição na ótica quântica. Em geral, como os operadores aniquilação e criação estão relacionados com os operadores posição e momento, há uma relação entre as distribuições usadas em cada caso. Em particular, pode-se citar que a função de Wigner é útil em ambas as situações.

Devido a esta adaptabilidade da função de Wigner, ela foi escolhida, dentre as várias opções, para a condução dos estudos neste trabalho. Na próxima seção iremos estudar de forma aprofundada suas propriedades e características que, apesar dos muitos anos de existência, a mantêm como a principal função de quasiprobabilidade.

2.2 FUNÇÃO DE WIGNER: PROPRIEDADES

Proposta pela primeira vez em 1932 no trabalho do autor cujo nome recebe [1], a função de Wigner é, como ressaltado anteriormente, uma dentre várias funções de quasiprobabilidade possíveis. O que a torna especial são as propriedades que esta função exhibe. Para um sistema de n dimensões espaciais com estados mistos, a função assume a seguinte forma:

$$F(q, p) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int \cdots \int dy_1 \cdots dy_n \langle q+y | \hat{\rho} | q-y \rangle e^{2ip \cdot y / \hbar}, \quad (2.11)$$

sendo $\hat{\rho}$ a matriz densidade $n \times n$ que representa o sistema e y , q e p vetores n -dimensionais com $p \cdot y$ sendo o produto escalar entre eles. Para o caso de um sistema de estado puro a equação (2.11) torna-se:

$$F(q, p) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int \cdots \int dy_1 \cdots dy_n \psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{2ip \cdot y / \hbar}. \quad (2.12)$$

Por simplicidade e praticidade nos cálculos, esta seção irá tratar de sistemas unidimensionais. Os resultados e demonstrações para sistemas n -dimensionais são análogos, embora muito mais trabalhosos. Para sistemas unidimensionais, as equações (2.11) e (2.12) tornam-se, respectivamente:

$$F(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \langle q+y | \hat{\rho} | q-y \rangle e^{2ipy/\hbar} \quad (2.13)$$

$$F(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{2ipy/\hbar}. \quad (2.14)$$

Wigner optou por esta função, pois, na época, parecia-lhe a mais simples em que as transformações de Galileu de suas variáveis correspondiam às mesmas transformações de Galileu da função de onda quântica. Posteriormente em [2], Wigner considerou as propriedades que uma boa função de quasiprobabilidade deveria exibir e deduziu que (2.11) era a única forma possível. Em um trabalho mais moderno de O'Connell e Wigner [5] uma outra lista de propriedades fora considerada e os autores mostraram que estas propriedades também levam à forma (2.11). As propriedades propostas por O'Connell, para o caso de um estado puro unidimensional, estão listadas abaixo e suas respectivas deduções encontram-se no Apêndice A.

1. Hermiticidade

Aqui estamos cometendo um abuso de notação, pois $F(q, p)$ trata-se de uma função e não uma matriz, logo devemos exigir que ela seja real, já que exigir que ela seja hermitiana não faz sentido. Iremos usar hermiticidade como sinônimo de realidade devido ao fato de esta propriedade ser válida também para a matriz de Wigner, introduzida no próximo capítulo. Assim sendo, $F(q, p)$ deve ser hermitiana, ou seja:

$$F(q, p) = F^*(q, p). \quad (2.15)$$

2. Normalização

Posição:

$$\int dp F(q, p) = |\psi(q)|^2 = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle. \quad (2.16)$$

Momento:

$$\int dq F(q, p) = |\psi(p)|^2 = \langle p | \hat{p} | p \rangle. \quad (2.17)$$

Total:

$$\iint dq dp F(q, p) = 1. \quad (2.18)$$

3. Transformações de Galileu:

$$\begin{aligned} \psi(q) &\rightarrow \psi'(q) = \psi(q+a) \\ \Rightarrow F'(q, p) &= F(q+a, p). \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \psi(q) &\rightarrow \psi'(q) = e^{ip'q/\hbar} \psi(q) \\ \Rightarrow F'(q, p) &= F(q, p-p'). \end{aligned} \quad (2.20)$$

4. Reflexões:

Espacial:

$$\begin{aligned} \psi(q) &\rightarrow \psi'(q) = \psi(-q) \\ \Rightarrow F'(q, p) &= F(-q, -p). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Temporal [18]:

$$\begin{aligned}\psi(q) &\rightarrow \psi'(q) = \psi^*(q) \\ \Rightarrow F'(q, p) &= F(q, -p).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Por tratar-se da formulação não-relativística nenhuma destas transformações é relativística e, também, desconsidera-se a influência do spin.

5. Para a partícula livre, a equação que a função de distribuição quântica obedece deve ser idêntica a clássica:

$$\frac{\partial F(q, p, t)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial F(q, p, t)}{\partial q}. \quad (2.23)$$

6. Sejam os estados $\psi(q)$ e $\phi(q)$ representados por $F_\psi(q, p)$ e $F_\phi(q, p)$, respectivamente, tem-se:

$$\left| \int dq \psi^*(q) \phi(q) \right|^2 = (2\pi\hbar) \iint dq dp F_\psi(q, p) F_\phi(q, p). \quad (2.24)$$

Como consequência imediata, tomando $\phi(q) = \psi(q)$:

$$\iint dq dp [F_\psi(q, p)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (2.25)$$

que, embora seja um valor alto, é finito. Portanto $F(q, p)$ não pode ter picos indefinidamente altos, excluindo-se distribuições da forma $P(q, p) = \delta(q - \hat{q})\delta(p - \hat{p})$, como a sugerida na seção anterior. Este resultado é válido também para casos de estado genérico, onde somamos ao lado direito da equação (2.25) todos os estados, tomando a forma $\sum_\beta w_k^2$, sendo w_k os valores característicos de \hat{p} .

Por outro lado, se $\phi(q) \perp \psi(q)$:

$$\iint dq dp F_\psi(q, p) F_\phi(q, p) = 0, \quad (2.26)$$

mostrando que $F(q, p)$ não pode ser sempre positiva, diferentemente das funções de probabilidade clássicas, motivo pelo qual é designada

função de quasiprobabilidade. Este resultado já é conhecido há muito tempo e foi generalizado pelo trabalho de Wigner [2], onde o autor demonstra que ao satisfazer as propriedades 1 e 2, a função, necessariamente, apresenta este comportamento.

7.

$$\iint dq dp A(q, p) B(q, p) = (2\pi\hbar) \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}), \quad (2.27)$$

onde $A(q, p)$ é o mapeamento no espaço de fase do operador quântico \hat{A} . $A(q, p)$ também é conhecido como a descrição correspondente no espaço de fase de \hat{A} , ou somente de correspondente no espaço de fase, e é dado através da prescrição de Wigner, proposta por Weyl [3]:

$$A(q, p) = \int dz e^{ipz/\hbar} \langle q + 1/2z | \hat{A} | q - 1/2z \rangle. \quad (2.28)$$

Quando definido desta maneira a função apresenta de imediato a seguinte propriedade:

$$\iint dq dp A(q, p) = 2\pi\hbar \text{Tr}(\hat{A}), \quad (2.29)$$

sendo que existe uma relação análoga para o operador \hat{B} . De (2.28) é fácil verificar que se o operador \hat{A} for hermitiano então sua descrição no espaço de fase será real, entretanto se \hat{A} for antissimétrico seu correspondente deverá ser imaginário. Como em nenhuma das situações pode-se obter um operador no espaço de fase nulo, a volta desta afirmação é verdadeira. Ou seja, caso o operador correspondente $A(q, p)$ seja real, então \hat{A} é, obrigatoriamente, hermitiano. Já se $A(q, p)$ for imaginário puro tem-se que \hat{A} deve ser antissimétrico. Outro fato evidente de (2.28) é que a descrição no espaço de fase do adjunto \hat{A}^\dagger é o complexo conjugado da descrição dada para \hat{A} . Assim se tivermos duas descrições no espaço de fase conjugadas, seus operadores quânticos devem ser adjuntos.

Comparando (2.13) com (2.28) vemos que $F(q, p)$ é obtida quando tomamos em (2.28) $\hat{A} = (2\pi\hbar)^{-1}\hat{p}$. Tomando em (2.27) $\hat{A} = (2\pi\hbar)^{-1}\hat{p}$ e $\hat{B} = 1$ obtem-se (2.18). Já se $\hat{B} = (2\pi\hbar)^{-1}\hat{p}$, tem-se:

$$\iint dq dp A(q, p) F(q, p) = \text{Tr}(\hat{p}\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})) = \langle \hat{A} \rangle, \quad (2.30)$$

que é equivalente a (2.2). Neste resultado reside o poder das funções de quasiprobabilidade, e sua descoberta data de 1932, onde Wigner [1] demonstra ser válido para operadores \hat{A} que são somas de funções apenas de \hat{q} com funções apenas de \hat{p} , ou seja, $\hat{A} = \hat{Q}(\hat{q}) + \hat{P}(\hat{p})$. Este resultado um tanto quanto restritivo foi expandido no trabalho de Moyal [4], onde é provado que o resultado é válido para qualquer função de \hat{q} e \hat{p} , desde que A seja a descrição no espaço de fase proposta por Weyl [3].

8. Simetria $q - p$:

Tomando a transformada de Fourier da função de onda:

$$\phi(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dq \psi(q) e^{-ipq/\hbar}, \quad (2.31)$$

obtemos:

$$F(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dp' \phi^*(p + p') \phi(p - p') e^{-2iqp'/\hbar}, \quad (2.32)$$

que mostra explicitamente que a função de Wigner é simétrica em relação a troca posição-momento.

Em seu artigo de 1979, [2], Wigner demonstrou que as propriedades 1 – 5 são capazes de determinar a função de quasiprobabilidade univocamente. Em 1981 O'Connell e Wigner, [5], mostraram que, ao exigir que as propriedades 1 – 4 e 6 sejam satisfeitas, também há unicidade na definição da função probabilidade e, em ambos os casos, esta é a função de Wigner (2.11).

Para finalizar este estudo sobre as propriedades da função de Wigner clássica, ressalta-se as condições e restrições a que esta função, na forma como foi apresentada até o momento, encontra-se sujeita. Em primeiro lugar ela é não-relativística, embora mais adiante iremos apresentar a sua versão covariante. Também, segundo (2.25) ela não pode possuir divergências, como esperado de uma função de distribuição fisicamente aceitável. Além disso, segundo (2.26) ela deve possuir locais em que assume valores negativos e, neste ponto, reside o motivo pelo qual trata-se de uma função de quasiprobabilidade. De maneira geral, ao utilizar a função de Wigner, ou qualquer outra função de quasiprobabilidade, deseja-se trabalhar com uma formulação alternativa da mecânica quântica, uma que não envolva a matriz densidade e o espaço de configuração, mas a função de Wigner e o espaço de fase. Pode-se,

então, imaginar a função de Wigner como a descrição no espaço de fase da matriz densidade, como foi discutido no fim da propriedade 7.

3 FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE

Para o tratamento de problemas envolvendo plasmas quânticos e relativísticos, é necessária a formulação de um função de quasiprobabilidade covariante, ou função de Wigner covariante. Funções desta natureza foram introduzidas primeiramente por Klimontovich [19], Biskamp [20] e Balescu [21] e [22]. As distribuições de Wigner propostas por Balescu não são manifestamente covariantes e apresentam um produto normal desnecessário que elimina alguns fenômenos importantes depois da renormalização. Elas tratam de quasi-férmions de carga unitária (chargeons).

A partir destas outras definições foram surgindo, agora já na forma manifestamente covariante, primeiramente para tratar o gás de neutrinos, entre as quais [23] e [24], depois o gás de elétrons, em [8, 25–27]. Outra definição muito útil foi dada por Carruthers e Zachariasen [6] no contexto da teoria de campos, mais especificamente na criação-aniquilação de partículas. Tal definição foi mais tarde generalizada para uma forma completamente covariante por Hakim [7] e [8]. Uma versão atualizada e mais bem fundamentada pode ser encontrada no livro de mesmo autor [9].

Para este trabalho, a definição de Hakim é suficiente. Entretanto para o tratamento de teorias que possuam invariância de calibre, como a QCD, uma função de Wigner igualmente invariante é necessária. Vários artigos abordam diferentes opções para diferentes casos, entre os quais, podemos citar [28–30]. O formalismo de Wigner também já foi modificado para tratar espaços curvos com aplicações na cosmologia, como em [31].

Neste capítulo estudaremos a fundo as características e propriedades da função de Wigner covariante para férmions livres. Fazemos isto, pois a expansão dos conceitos deduzidos aqui para o caso de interesse é direta, embora envolva algumas sutilezas. Além disso, neste capítulo fazemos uma revisão de conceitos básicos, como a álgebra de Clifford e a aproximação de spin saturado, que será usado extensivamente no próximo capítulo.

3.1 FUNÇÃO DE WIGNER PARA PARTÍCULAS DE SPIN 1/2

Como no caso não-relativístico, procura-se por uma definição para função de Wigner que simplifique a forma como os valores médios dos observáveis físicos são calculados, de modo a se assemelhar ao caso clássico. Para tanto é necessário conhecer quais são os principais observáveis das partículas de spin 1/2, como o operador quadricorrente:

$$\hat{J}^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (3.1)$$

sendo esta uma corrente para uma partícula de carga unitária. Ao longo deste e do próximo capítulo estaremos adotando o sistema de unidades naturais em que $c = \hbar = 1$, exceto quando houver indicação contrária. Também iremos adotar a seguinte notação em que x é um quadrivetor, ou seja, $x = x^\mu \equiv (t, \vec{x})$. Desta forma o tensor energia-momento assume a forma [32]:

$$\hat{T}^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi(x), \quad (3.2)$$

e o operador spin:

$$\hat{S}^{\mu\nu\lambda}(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \sigma^{\nu\lambda} \psi(x), \quad (3.3)$$

onde $\overleftrightarrow{\partial}^\nu = \overrightarrow{\partial}^\nu - \overleftarrow{\partial}^\nu$, ψ é o campo fermiônico, γ as matrizes de Dirac e $\sigma^{\nu\lambda} = i/2[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]$, com $[\cdot, \cdot]$ sendo o comutador. De forma geral, a quadricorrente de um operador \hat{A} possui a seguinte forma:

$$J_A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \hat{A} \psi(x). \quad (3.4)$$

A partir da definição, temos que $\hat{A} = I$ para a quadricorrente, $\hat{A}^\nu = i/2 \overleftrightarrow{\partial}^\nu$ para o tensor energia-momento e $\hat{A}^{\nu\lambda} = i\sigma^{\nu\lambda}$ para o operador spin dados acima. Esta quadricorrente pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J_A^\mu(x) = \text{Sp} \int d^4R \gamma^\mu \left\langle x + \frac{R}{2} \left| \hat{A} \right| x - \frac{R}{2} \right\rangle \bar{\psi} \left(x + \frac{R}{2} \right) \otimes \psi \left(x - \frac{R}{2} \right). \quad (3.5)$$

A prova desta equação e outras equações relevantes deste capítulo podem ser encontradas no anexo B. Sp indica o traço sobre os índices espinoriais e, se houver, índices internos.

A média quântica desta quadricorrente é dada por:

$$\langle J_A^\nu(x) \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} J_A^\nu(x) \}, \quad (3.6)$$

onde ρ é a matriz densidade que caracteriza o estado do sistema completamente e Tr indica um traço nos estados quânticos do sistema. Definindo a média de um operador qualquer \hat{A} como:

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (3.7)$$

e inserindo a equação (3.5) na equação (3.6), obtemos:

$$\langle J_A^\mu(x) \rangle = \text{Sp} \int d^4 R \, \gamma^\mu \left\langle x + \frac{R}{2} \left| \hat{A} \right| x - \frac{R}{2} \right\rangle \left\langle \bar{\psi} \left(x + \frac{R}{2} \right) \otimes \psi \left(x - \frac{R}{2} \right) \right\rangle. \quad (3.8)$$

Estando a dedução no anexo B. Conhecendo a forma que os observáveis possuem, definimos o *operador* função de Wigner como:

$$\hat{F}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R \, e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}(x + 1/2R) \otimes \psi(x - 1/2R), \quad (3.9)$$

com p e R quadrvetores. A função de Wigner covariante é o valor esperado deste operador:

$$F(x, p) = \langle \hat{F}(x, p) \rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{F}(x, p)\}, \quad (3.10)$$

que se torna:

$$F(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R \, e^{-ip \cdot R} \left\langle \bar{\psi}(x + \frac{1}{2}R) \otimes \psi(x - \frac{1}{2}R) \right\rangle. \quad (3.11)$$

Neste caso $F(x, p)$ trata-se uma matriz nos índices espinoriais e, se houver, internos. Usamos na definição da função de Wigner o produto externo \otimes . Explicitando os índices matriciais, obtemos:

$$F_\alpha^\beta(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R \, e^{-ip \cdot R} \left\langle \bar{\psi}^\beta(x + \frac{1}{2}R) \psi_\alpha(x - \frac{1}{2}R) \right\rangle. \quad (3.12)$$

Vale ressaltar a inversão dos índices de F em relação aos ψ 's. Usando a definição (3.11) e a equação (3.8) e exigindo que o valor esperado da quadricorrente assuma a forma:

$$\langle J_A^\mu(x) \rangle = \text{Sp} \int d^4 p \, \gamma^\mu A(x, p) F(x, p), \quad (3.13)$$

a função $A(x, p)$ deve ser dada por:

$$A(x, p) = \int d^4 R \, e^{ip \cdot R} \langle x + R/2 | \hat{A} | x - R/2 \rangle. \quad (3.14)$$

A prova que (3.13) é igual a (3.8) pode ser encontrada no anexo B. Quando definida desta maneira, a função de Wigner covariante simplifica o cálculo de valores esperados e torna-os muito semelhantes ao caso clássico, embora seja necessário encontrar a forma específica de $A(x, p)$ para cada operador que se deseja calcular. Na prática, apenas $\langle \hat{f}^\mu(x) \rangle$, $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle$ e $\langle \hat{S}^{\mu\nu\lambda}(x) \rangle$ são necessários e, em alguns casos, suas respectivas flutuações. Para os primeiros dois casos a fórmula é evidente:

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \text{Sp} \int d^4 p \, \gamma^\mu F(x, p), \quad (3.15)$$

e

$$\langle T^{\mu\nu}(x) \rangle = \text{Sp} \int d^4 p \, \gamma^\mu p^\nu F(x, p). \quad (3.16)$$

As deduções, novamente, estão no apêndice B. Para o caso do spin os cálculos são mais complicados e o resultado não entra no escopo do trabalho, já que este desconsidera os efeitos do spin na aproximação semi-clássica.

3.2 CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE

A função de Wigner relativística é normalizada com a carga total do sistema, quantidade sempre conservada, e não com o número de partículas que constituem o sistema, valor que pode variar. Assim, a rigor, a função de Wigner não se trata de uma distribuição de 1-partícula, mas de uma distribuição de 1-carga, entretanto continuaremos a designá-la por distribuição de 1-partícula. A normalização se dá através de:

$$Q = \text{Sp} \left\{ \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu \int d^4 p \, \gamma^\mu F(x, p) \right\}, \quad (3.17)$$

sendo Σ uma hipersuperfície tipo espaço no espaço de Minkowski com parâmetro tempo fixo.

Uma das principais vantagens no uso da função de Wigner relativística no tratamento de sistemas é que sua equação de movimento complexa pode ser dividida em duas, uma de vínculo e outra de transporte. A equação de vínculo é o análogo quântico da condição de camada de massa clássica, enquanto a equação de transporte é a generalização covariante da equação de Vlasov-Boltzmann.

Devemos enfatizar que para as funções de distribuição quânticas p^μ não é, em geral, o quadrimomento da partícula, o que invalida a equação $p^\mu p_\mu = m^2$, a condição de camada de massa clássica. Para cada função de distribuição está associada uma representação dos operadores em funções de x e p . No caso da definição dada acima para a função de Wigner, a representação dá-se através da equação (3.14).

Finalmente, a função de Wigner pode ser decomposta de maneira única na base de dezesseis matrizes que compõe a álgebra de Clifford [32]:

$$\{\gamma_A\}_{A=1,2,\dots,16} = \left(I, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], -i\gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5 \right), \quad (3.18)$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \sum_A f_A(x, p) \gamma_A \\ F(x, p) &= f(x, p)I + f^\mu(x, p)\gamma_\mu + \frac{1}{2}f^{\mu\nu}(x, p)\sigma_{\mu\nu} + \\ &\quad + if_5(x, p)\gamma^5 + f_{5\mu}\gamma^\mu\gamma_5, \end{aligned} \quad (3.19)$$

com a definição:

$$f_A(x, p) = \frac{1}{4} \text{Sp}[F(x, p) \gamma_A]. \quad (3.20)$$

Os termos da equação (3.19) são, respectivamente, escalar, vetorial, tensorial antissimétrico, pseudo escalar, e pseudo vetorial. Esta decomposição é especialmente útil no tratamento das equações básicas que a função de Wigner obedece, assunto abordado na próxima seção.

3.3 EQUAÇÕES BÁSICAS

Para examinar as equações que a função de Wigner $F(x, p)$ obedece é necessário ver quais equações que os campos envolvidos obedecem. Num primeiro momento considera-se partículas não interagentes, já sabendo que a inserção de campos interagentes (mesônicos, eletromagnéticos...) leva a modificações facilmente incorporadas. O campo fermiônico, então, deve satisfazer as equações de Dirac:

$$\begin{cases} [i\gamma \cdot \partial - m]\psi(x) = 0 \\ \bar{\psi}(x)[i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} + m] = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

A partir destas equações, e um pouco de manipulação matemática encontrada com detalhes no anexo B, obtemos:

$$\begin{cases} \{i\gamma \cdot \partial + 2[\gamma \cdot p - m]\}F(x, p) = 0 \\ F(x, p)\{i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} - 2[\gamma \cdot p - m]\} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Uma destas equações, a primeira por exemplo, pode ser decomposta em outras duas equações, uma real e outra imaginária. Estas duas equações representam a camada de massa a qual as partículas pertencem e a equação de transporte do sistema. Um estudo mais aprofundado das características da equação será feita na próxima seção.

3.4 REPRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

É possível realizar uma análise mais profunda destas equações a partir do uso da expansão de $F(x, p)$ nas matrizes da álgebra de Clifford, assim como feito de maneira semelhante por Vasak [33]. Multiplicando a primeira equação da (3.22) pelas matrizes γ_A apropriadas, contidas em (3.18), e tomando o traço do resultado é possível obter 32 equações. Após algumas manipulações, e explicitando \hbar , obtemos:

$$p_\mu f^\mu - mf = 0, \quad (3.23)$$

$$\hbar \partial^\mu f_{5\mu} - 2mf_5 = 0, \quad (3.24)$$

$$2p_\mu f + \hbar \partial^\nu f_{\mu\nu} - 2mf_\mu = 0, \quad (3.25)$$

$$-\hbar \partial_\mu f_5 + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu f^{\alpha\beta} - 2mf_{5\mu} = 0, \quad (3.26)$$

$$-\hbar(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha f_5^\beta - 2mf_{\mu\nu} = 0, \quad (3.27)$$

$$\hbar \partial_\mu f^\mu = 0, \quad (3.28)$$

$$p^\mu f_{5\mu} = 0, \quad (3.29)$$

$$\hbar \partial_\mu f - 2p^\nu f_{\mu\nu} = 0, \quad (3.30)$$

$$4p_\mu f_5 + \hbar \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu f^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.31)$$

$$2(p_\mu f_\nu - p_\nu f_\mu) - \hbar \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\alpha f_5^\beta = 0. \quad (3.32)$$

O método usado para obter estas equações pode ser encontrado no apêndice C. Podemos facilitar ainda mais o problema resolvendo estas equações para f_5 , f^μ e $f_{\mu\nu}$, obtendo, em primeira ordem em \hbar :

$$f_5 = \frac{\hbar}{2m} \partial^\mu f_{5\mu}, \quad (3.33)$$

$$f_\mu = \frac{p_\mu}{m} f - \frac{\hbar}{2m^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha \partial^\nu f_5^\beta, \quad (3.34)$$

$$f_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{2m^2} (p_\nu \partial_\mu - p_\mu \partial_\nu) f - \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{m} p^\alpha f_5^\beta. \quad (3.35)$$

Logo as 16 componentes da função de Wigner não são totalmente independentes nesta aproximação. Na verdade com apenas 5 componentes, f e $f_{5\mu}$, é possível construir a função de Wigner.

3.5 DECOMPOSIÇÃO SPINORIAL

O intuito desta seção é mostrar explicitamente o efeito do spin na função de Wigner. Seja a corrente de Dirac usual:

$$\hat{j}^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (3.36)$$

Ela pode ser reescrita como:

$$\hat{J}^\mu = \frac{i}{2m} \left(\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi(x) + i\partial_\nu (\bar{\psi}(x) \sigma^{\nu\mu} \psi(x)) \right). \quad (3.37)$$

Sendo esta a famosa decomposição de Gordon [34]. O primeiro termo da equação é a chamada parte convectiva da corrente, enquanto o segundo é conhecido como a contribuição do spin para a corrente. Iremos tentar obter uma equação semelhante a esta. Primeiramente vamos relembrar as equações de campo:

$$\begin{cases} [i\gamma \cdot \overrightarrow{\partial} - m] \psi(x) = 0 \\ \bar{\psi}(x) [i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} + m] = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

E, como na decomposição de Gordon, partimos da corrente de Dirac, mas com algumas modificações:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu \psi(x-R/2) &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu \psi(x-R/2) + \bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu \psi(x-R/2)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{m} [-m \bar{\psi}(x+R/2)] \gamma^\mu \psi(x-R/2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu [m \psi(x-R/2)] \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ -\bar{\psi}(x+R/2) [i\gamma^\nu \overleftarrow{\partial}_\nu \gamma^\mu \psi(x-R/2) + \right. \\ &\quad \left. \bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu [i\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x-R/2)] \right\} \\ &= \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\psi}(x+R/2) \left[-\gamma^\nu \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \right] \psi(x-R/2) \right\} \\ &= \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\psi}(x+R/2) \left[-(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu}) \overleftarrow{\partial}_\nu + (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}) \partial_\nu \right] \psi(x-R/2) \right\} \\ &= \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\psi}(x+R/2) \left[\left(\partial^\mu - \overleftarrow{\partial}^\mu \right) - i\sigma^{\mu\nu} \left(\overleftarrow{\partial}_\nu + \partial_\nu \right) \right] \psi(x-R/2) \right\} \\ \bar{\psi}(x+R/2) \gamma^\mu \psi(x-R/2) &= \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\psi}(x+R/2) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi(x-R/2) + \right. \\ &\quad \left. + i\partial_\nu [\bar{\psi}(x+R/2) \sigma^{\nu\mu} \psi(x-R/2)] \right\}, \quad (3.39) \end{aligned}$$

que é semelhante à decomposição de Gordon. Novamente temos uma parte convectiva e uma contribuição de spin a corrente, primeiro e segundo termos respectivamente. Para os cálculos realizados mais adiante será utilizada a

aproximação semi-clássica de spin saturado, onde consideramos que o spin total do sistema é zero, logo o termo de contribuição de spin não é utilizado. Continuaremos trabalhando com a equação (3.39) para demonstrar outra característica interessante da função de Wigner. (3.39) pode ser reescrita como:

$$\bar{\psi}(x+R/2)\gamma^\mu\psi(x-R/2) = \frac{1}{m}\bar{\psi}(x+R/2)p^\mu\psi(x-R/2) + \\ -\frac{1}{2m}\partial_\nu[\bar{\psi}(x+R/2)\sigma^{\nu\mu}\psi(x-R/2)]$$

$$\text{Sp}\left(\gamma^\mu\int d^4R e^{-ip\cdot R}\langle\bar{\psi}(x+R/2)\otimes\psi(x-R/2)\rangle\right) = \\ = \frac{p^\mu}{m}\text{Sp}\left(I_4\int d^4R e^{-ip\cdot R}\langle\bar{\psi}(x+R/2)\otimes\psi(x-R/2)\rangle\right) + \\ -\frac{1}{2m}\partial_\nu\text{Sp}\left(\sigma^{\nu\mu}\int d^4R e^{-ip\cdot R}\langle\bar{\psi}(x+R/2)\otimes\psi(x-R/2)\rangle\right)$$

$$f^\mu = \frac{p^\mu}{m}f - \frac{1}{2m}\partial_\nu f^{\nu\mu} \quad (3.40)$$

$$2p^\mu f + \partial_\nu f^{\mu\nu} - 2mf_\mu = 0 \quad (3.41)$$

Esta última equação é idêntica a equação (3.25), obtida a partir da equação da função de Wigner. Portanto trabalhar com a função de Wigner e sua equação de movimento ou com a equação dos campos fermiônicos e os respectivos campos geram os mesmos resultados. Também ao analisar a (3.40), equivalente a decomposição de Gordon para a função de Wigner, vemos que o termo $f^{\mu\nu}$ está relacionado com as características espinoriais do sistema. Desprezando os efeitos de spin do sistema, obtemos:

$$f^\mu \approx \frac{p^\mu}{m}f. \quad (3.42)$$

Nós iremos obter esta aproximação na seção seguinte, entretanto vale notar a ligação estreita entre $f_{\mu\nu}$ e o spin. O leitor atento deve imaginar que ao usarmos a condição de spin saturado $f_{\mu\nu}$ deverá anular-se, fato que realmente ocorre.

3.6 APROXIMAÇÃO DE SPIN SATURADO

A aproximação de spin saturado consiste em considerar o spin total do sistema zero. Para verificar como esta aproximação afeta as componentes da função de Wigner é necessário o cálculo do spin total. Para tanto iremos retomar a equação (3.3):

$$S^{\mu\nu\lambda}(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\sigma^{\nu\lambda}\psi(x). \quad (3.43)$$

Deste operador é possível obter o operador spin total integrando em uma hiper superfície com tempo constante, ou seja:

$$S^{\nu\lambda}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \sigma^{\nu\lambda} \psi \quad (3.44)$$

Tomando o valor esperado obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S^{\nu\lambda}(\Sigma)) &= \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \gamma^{\mu} \sigma^{\nu\lambda} \text{Tr}(\bar{\psi} \otimes \psi) \\ \langle S^{\nu\lambda}(\Sigma) \rangle &= \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \gamma^{\mu} \sigma^{\nu\lambda} \langle \bar{\psi} \otimes \psi \rangle \\ \text{Sp}(\langle S^{\nu\lambda}(\Sigma) \rangle) &= \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \gamma^{\mu} f^{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Agora, tomando a aproximação de spin saturado, no qual o spin total é igual a zero, obtemos:

$$\int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \gamma^{\mu} f^{\nu\lambda} = 0$$

que leva:

$$\Rightarrow f^{\nu\lambda} = 0 \quad (3.46)$$

$$\Rightarrow f_5^{\beta} = 0 \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow f_5 = 0, \quad (3.48)$$

onde foi usada as equações (3.35), (3.30) e (3.33).

Como discutido na seção 2.5, a componente $f_{\mu\nu}$ possui um relacionamento estreito com o spin, logo este comportamento era esperado. Como veremos ao fim deste capítulo, a aproximação de spin saturado, quando tomada juntamente com a aproximação semi-clássica, faz com que a função

de Wigner dependa apenas da componente escalar f , tornando o problema imensamente mais simples.

3.7 SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA E HOMOGÊNEA

Nesta seção iremos obter a forma da função de Wigner de equilíbrio. Como desejamos trabalhar com a solução por expansão em ondas planas para a equação de Dirac, é necessário considerar que a função de Wigner no equilíbrio seja estacionária e homogênea, ou seja:

$$F(x, p) \equiv F(p). \quad (3.49)$$

Assim, as equações movimento (3.22) tornam-se:

$$\begin{cases} (\gamma \cdot p - m) F(p) = 0 \\ F(p) (\gamma \cdot p - m) = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

e, multiplicando, por exemplo, a primeira equação por $(\gamma \cdot p + m)$, obtemos:

$$(p^2 - m^2) F(p) = 0. \quad (3.51)$$

Ou seja, $p^2 = m^2$, a função de Wigner encontra-se na camada de massa. Agora vamos avaliar como as componentes da função de Wigner comportam-se.

Já que a função de Wigner é estacionária e homogênea, suas componentes também são, portanto, a partir de (3.33):

$$f_5 = \frac{\hbar}{2m} \partial^\mu f_{5\mu} = 0. \quad (3.52)$$

Levando as equações (3.34) e (3.35) em consideração, a função de Wigner toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(p) &= fI_4 + f^\mu \gamma_\mu + \frac{1}{2} f^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + i f_5 \gamma_5 + f_{5\mu} \gamma_\mu \gamma^5 \\ F(p) &= fI_4 + \frac{\gamma \cdot p}{m} f - \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} p^\alpha f_5^\beta + \gamma_\mu \gamma_5 f_5^\mu \\ F(p) &= \frac{m + \gamma \cdot p}{m} f + \left(\gamma_\beta \gamma_5 - \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} p^\alpha \right) f_5^\beta. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Desconsiderando os termos pseudo-vetoriais, que equivale a desconsiderar efeitos spinoriais como vimos na última seção, a equação torna-se:

$$F(p) = \frac{m + \gamma \cdot p}{m} f \quad (3.54)$$

Portanto é suficiente o cálculo de f :

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{4} \text{Sp}(F(p)) \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \langle \bar{\psi}(x + 1/2R) \otimes \psi(x - 1/2R) \rangle \right) \\ f(p) &= \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \langle \bar{\psi}(x + 1/2R) \psi(x - 1/2R) \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para obtermos a $f(p)$ vamos considerar a expansão da solução da equação de Dirac em ondas planas:

$$\psi(x) = \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\vec{p}) \bar{v}(\vec{p}) e^{ip \cdot x}] \quad (3.56)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a^\dagger(\vec{p}) \bar{u}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + b(\vec{p}) v(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}], \quad (3.57)$$

com a definição:

$$E_p^2 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.58)$$

Para este trabalho usamos condições de normalização semelhantes, entretanto não idênticas, às encontradas em [9], listadas abaixo:

- Ortonormalidade:

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}) = \bar{v}_\alpha(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}) = 2m \\ \bar{u}_\alpha(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

- Segunda Quantização:

$$\{a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')\} = \{b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3.60)$$

- Estatística

$$\begin{cases} \langle a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}') \rangle = \frac{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')}{e^{\beta(E_p-E_F)+1}} \\ \langle b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}') \rangle = \frac{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')}{e^{\beta(E_p+E_F)+1}}. \end{cases} \quad (3.61)$$

onde E_F é a energia de Fermi.

Agora basta inserir os dados na (3.55) para obter a função de Wigner de equilíbrio. O cálculo explícito encontra-se no apêndice D, onde obtemos:

$$f(p) = \frac{m}{2} \delta(p^2 - m^2) \left[\frac{\theta(p_0)}{e^{\beta(E_p-E_F)+1}} + \frac{\theta(-p_0)}{e^{\beta(E_p+E_F)+1}} \right] + O(p), \quad (3.62)$$

onde θ é a função de Heaviside.

Nesta equação o primeiro termo na chave representa a função distribuição das partículas, o segundo termo, a função das anti-partículas e o terceiro termo, fora das chaves, representa a contribuição de vácuo. Este último termo desaparece se tomarmos a ordenação normal, portanto não necessitamos dele. Também, na aproximação semi-clássica, iremos tratar apenas das partículas, logo o segundo termo também não tem utilidade. Assim nossa função distribuição torna-se:

$$f(p) = \frac{m}{2} \frac{\delta(p^2 - m^2)}{e^{\beta(E_p-E_F)+1}} \theta(p_0), \quad (3.63)$$

Ou, a $T=0$:

$$f(p) = \frac{m}{2^2} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \theta(E_F - E_p). \quad (3.64)$$

3.8 APROXIMAÇÃO SEMI-CLÁSSICA

A aproximação semi-clássica consiste em considerar termos em primeira ordem em \hbar nas equações da função de Wigner e suas componentes. Portanto as equações (3.33), (3.34) e (3.35) são válidas, já que para obtê-las nós retemos termos em primeira ordem em \hbar . Levando em consideração o spin saturado e as equações (3.46), (3.47) e (3.48), obtemos:

$$f_5 = 0, \quad (3.65)$$

$$f_\mu = \frac{p_\mu}{m} f, \quad (3.66)$$

Portanto, a função de Wigner assuma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(x, p) &= f I_4 + \gamma^\mu f_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + i f \gamma_5 \gamma_5 + \gamma_\mu \gamma_5 f_5^\mu \\ F(x, p) &= f + \frac{\gamma \cdot p}{m} f. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Esta última equação é exatamente igual a (3.54). Este fato permite afirmar que a aproximação semi-clássica é válida somente a condições próximas do equilíbrio, justificando o seu uso no próximo capítulo, onde estaremos tratando pequenas perturbações em torno do equilíbrio e suas consequências. A partir de agora nosso interesse é obter f e não a função de Wigner completa, já que é mais simples trabalhar com um escalar a uma matriz. Este fato reduz enormemente os cálculos, como poderá ser visto no próximo capítulo.

4 APLICAÇÃO DO FORMALISMO DE WIGNER COVARIANTE

4.1 MODELO $\sigma - \omega - \rho$

O modelo cujas equações serão tratadas ao longo deste capítulo é o modelo conhecido como $\sigma - \omega - \rho$. Como outros modelos da hadrodinâmica quântica (QHD), o $\sigma - \omega - \rho$ é um modelo efetivo da cromodinâmica quântica, válido para energias onde os quarks encontram-se confinados dentro da matéria.

Trata-se de um modelo efetivo, pois a teoria para tratar sistemas quantum-relativísticos sujeitos à interação forte já foi desenvolvida (QCD), embora haja problemas com a sua aplicação fora do limite de altas densidades e energias. Devido a estas dificuldades existem vários modelos válidos para diversos intervalos de energia e densidade que auxiliam no estudo das propriedades da matéria nuclear. Estes são os chamados modelos efetivos.

O modelo $\sigma - \omega - \rho$ consiste em um campo bariônico para prótons e nêutrons:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

interagindo via troca de mésons, sendo estes o méson escalar σ , representado pelo campo ϕ , o méson isoescalar-vetorial ω , representado pelo campo \mathcal{V} , e o méson isovetorial-vetorial ρ , representado pelo campo b . A Lagrangeana do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\nu \mathcal{V}^\mu - \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \right) - (M - g_s \phi) \right] \psi + \\ & + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m_s^2 \phi^2) - \frac{1}{3!} \kappa \phi^3 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 - \frac{1}{4} \Omega^{\mu\nu'} \Omega'_{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} m_\omega^2 \mathcal{V}^\mu \mathcal{V}_\mu - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_\mu \vec{b}^\mu, \end{aligned} \quad (4.1)$$

com $\Omega'_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{V}_\nu - \partial_\nu \mathcal{V}_\mu$ e $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{b}_\nu - \partial_\nu \vec{b}_\mu - g_\rho (\vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu)$. Além disso g_s , g_ν e g_ρ são as constantes de acoplamento entre os mésons e bárions, M , m_s , m_ν e m_ρ são as massas do bárion e dos respectivos mésons, e as constantes de auto-interação são κ e λ .

Usando o princípio de Hamilton, segue para as componentes q_i dos

campos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (4.2)$$

obtendo-se as seguintes equações para os campos:

$$\partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi + m_s^2 \phi + \frac{\kappa}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 = g_s \rho_s(x), \quad (4.3)$$

$$\partial_t^2 \mathcal{V}^\mu - \nabla^2 \mathcal{V}^\mu + m_\omega^2 \mathcal{V}^\mu = g_v J^\mu(x) + \partial^\mu \left(\partial_t \mathcal{V}^0 + \nabla \cdot \vec{\mathcal{V}} \right), \quad (4.4)$$

$$\partial_t^2 b^\mu - \nabla^2 b^\mu + m_\omega^2 b^\mu = g_v J_3^\mu(x) + \partial^\mu \left(\partial_t b^0 + \nabla \cdot \vec{b} \right), \quad (4.5)$$

onde $\rho_s = \bar{\psi} \psi$, $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ e $J_{3,i}^\mu = \bar{\psi} \tau_i \psi$, e a equação para o campo bariônico:

$$\left[\gamma^\mu \left(i\partial^\mu - g_v \mathcal{V}^\mu - \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \right) - (M - g_s \phi) \right] \psi = 0. \quad (4.6)$$

Definindo:

$$V_i^\mu = g_v \mathcal{V}^\mu + \frac{g_\rho}{2} \tau_i b^\mu, \quad (4.7)$$

$$M^* = M - g_s \phi, \quad (4.8)$$

$$iD_i^\mu(x) = i\partial^\mu - V_i^\mu(x), \quad (4.9)$$

a equação (4.6) torna-se:

$$(i\gamma_\mu D_i^\mu - M^*) \psi_i = 0, \quad (4.10)$$

que lembra muito a equação de Dirac para partículas livres. Iremos omitir o subíndice i doravante, já que o tratamento para nêutrons e prótons é semelhante. Este índice será resgatado ao fim da seção 1.3, onde a diferenciação se faz necessária.

Esta equação possui a mesma forma que a equação (3.21), portanto é de se esperar que ela se reduza à equação (3.22). Há, entretanto, uma grande diferença devido a natureza de D^μ e M^* . Parte dos cálculos do Apêndice B5 continua válida, fazendo a substituição de ∂^μ por D^μ e m por M^* . Isto segue até o cálculo do segundo comutador. A partir daí há grandes divergências no processo de dedução, principalmente pelo fato de $D'_\mu(x')$ e $M^*(x')$ dependerem de R , agindo de forma diferente a ∂'_μ e m quando integrado em $\int d^4 R$. Levando isto em consideração obtemos:

$$[\Pi^\mu \partial_\mu + (\Pi^\mu (\partial^\nu V_\mu) + M^* (\partial^\nu M^*)) \partial_{p\nu}] \frac{f(x, p)}{M^*} = 0, \quad (4.11)$$

com os cálculos que levam a este resultado contidos no Apêndice E.

4.2 EQUAÇÃO DE VLASOV

Seja a equação de movimento da componente escalar da função de Wigner, encontrada na seção anterior:

$$[\Pi^\mu \partial_\mu + (\Pi^\mu (\partial^\nu V_\mu) + M^* (\partial^\nu M^*)) \partial_{p\nu}] \frac{f(x, p)}{M^*} = 0. \quad (4.12)$$

Por motivo de simplicidade, iremos redefinir a função escalar de Wigner, de modo que:

$$f(x, p) \equiv \frac{f(x, p)}{M^*}, \quad (4.13)$$

sendo que esta nova definição valerá até o fim das deduções. Também vale lembrar que Π é o momento cinético definido por:

$$\Pi^\mu = p^\mu - V^\mu(x) \quad (4.14)$$

Vemos pela equação (4.12) que precisamos optar por trabalhar com o momento cinético ou com o momento canônico, já que estas quantidades estão relacionadas. Apesar de ser uma transformação mais complexa, iremos optar pelo momento cinético. Este tipo de transformação já é usada desde trabalhos em física de plasma da década de 1960 [35], e provou ser mais útil por simplificar os cálculos. Realizando a transformação:

$$(x, p) \rightarrow (R, \Pi),$$

onde $R^\mu \equiv x^\mu$ e $\Pi^\mu = p^\mu - V^\mu(x)$. Com esta definição, temos:

$$d^4 p = d^4 \Pi.$$

A nova função de distribuição após a mudança de variáveis é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x, p) &\equiv f(x, p^\mu = \Pi^\mu + V^\mu(x)) \\ f(x, p) &= f(R, \Pi + V) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Inserindo (4.15) em (4.12) obtemos a equação de Vlasov nas coordenadas (x, Π) :

$$[\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu}] f(x, \Pi) = 0, \quad (4.16)$$

com a definição $\Omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x)$. Os cálculos que levam a esta equação podem ser encontrados no Apêndice E.

Agora iremos considerar as correntes bariônicas e escalar em termos da função de distribuição $f(x, \Pi)$. Para tanto, precisamos de um ansatz para a função de Wigner escalar. Inspirados pela função de Wigner de equilíbrio (3.64), obtida na seção 2.6, usamos:

$$f(x, \Pi) = 2\theta(\Pi_0) \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \quad (4.17)$$

$$f(x, \Pi) = \frac{1}{\Pi_0} \delta(\Pi_0 - \sqrt{\vec{\Pi}^2 - M^{*2}}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}), \quad (4.18)$$

sendo que $\tilde{f}(x, \vec{\Pi})$ vai ser definido posteriormente para o caso trabalhado. Também, vale lembrar que na equação (3.64) $\Pi = p$, logo este ansatz é equivalente à função Wigner de equilíbrio quando :

$$\tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = \theta(E_F - E_\Pi), \quad (4.19)$$

onde E_F é a energia de Fermi.

A quadri-corrente bariônica e a densidade escalar são definidas como:

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^4\Pi \Pi^\mu f(x, \Pi) \quad (4.20)$$

$$\langle \rho_s(x) \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^4\Pi M^*(x) f(x, \Pi). \quad (4.21)$$

A prova destas equações encontra-se no Apêndice E. Vale lembrar que estas equações valem para prótons e nêutrons separadamente, ou seja, existem duas equações, uma para prótons e outra para nêutrons. Entretanto para este modelo ambos os desenvolvimentos são idênticos e não há necessidade de

realizar os cálculos duas vezes. Isto não acontece quando inserimos campos eletromagnéticos no sistema. Neste caso é necessário o desenvolvimento em separado das equações para nêutrons e prótons.

Usando a (4.18) como função de distribuição nos valores esperados acima, vemos que as integrais em Π reduzem-se a integrais em $\vec{\Pi}$ devido a função δ . Elas tomam a forma:

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{1}{E_\Pi} \Pi^\mu \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \quad (4.22)$$

$$\langle \rho_s(x) \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{M^{*}(x)}{E_\Pi} \tilde{f}(x, \vec{\Pi}), \quad (4.23)$$

onde $E_\Pi = \Pi_0 = \sqrt{\vec{\Pi}^2 + M^{*2}}$.

Vemos que este ansatz para a função de Wigner é extremamente útil, já que reduz as integrais em quatro dimensões para integrais em três dimensões. Além disso é possível escrever a função de Wigner de equilíbrio a partir deste ansatz, portanto iremos fazer uso dele. Aplicando o ansatz (4.18) na (4.16):

$$\begin{aligned} & \{ \Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu} \} f(x, \Pi) = 0 \\ & \{ \Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu} \} \theta(\Pi_0) \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nós desejamos, por motivos que ficarão claros mais adiante, comutar o termo $\theta(\Pi_0) \delta(\Pi^2 - M^{*2})$ com o termo entre as chaves. Para isto iremos utilizar:

$$[\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu}, \theta(\Pi_0)] = 0, \quad (4.25)$$

$$[\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu}, \delta(\Pi^2 - M^{*2})] = 0. \quad (4.26)$$

Estes comutadores são calculados no Apêndice F. Fazendo uso deles a (4.24) torna-se:

$$\begin{aligned} \theta(\Pi_0) \delta(\Pi^2 - M^{*2}) [\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu}] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) &= 0 \\ \frac{1}{E_\Pi} \delta\left(\Pi_0 - \sqrt{\vec{\Pi}^2 + M^{*2}}\right) [\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi\mu}] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) &= 0 \end{aligned}$$

Integrando em Π_0 , obtemos :

$$\left[\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu k} \partial_\Pi^k + M^* (\partial^\mu M^*) \partial_{\Pi k} \right] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = 0 \quad (4.27)$$

A equação (4.27) pode ainda ser reescrita da seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla + \dot{\vec{\Pi}} \cdot \nabla_\Pi \right] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = 0, \quad (4.28)$$

onde:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{\Pi}}{E_\Pi},$$

e

$$\dot{\vec{\Pi}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} - \nabla \times V^0 + \frac{1}{E_\Pi} \left[\vec{\Pi} \times (\nabla \times \vec{V}) - M^* \nabla M^* \right]. \quad (4.29)$$

A equação (4.28) possui a mesma forma que a equação de Vlasov clássica, motivo pelo qual estamos chamando estas equações como equações de Vlasov. Da teoria clássica sabe-se que a equação de Vlasov corresponde a conservação do número de partículas, que é dado através da conservação da função distribuição:

$$\frac{d}{dt} f(x, \vec{\Pi}) = \frac{d}{dt} f(t, \vec{x}, \vec{\Pi}) = 0. \quad (4.30)$$

Esta interpretação pode ser estendida para a teoria quântica, desde que não seja a conservação do número de partículas, mas a conservação de número de partículas menos o número de anti partículas. Em especial, no nosso caso, ela corresponde a uma conservação do número de partículas, exatamente igual ao caso clássica, visto que desprezamos as anti partículas.

4.3 RELAÇÕES DE DISPERSÃO ($T=0$)

A partir desta seção a iremos omitir o acento til sobre a função de Wigner, ou seja:

$$\tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = f(x, \vec{\Pi}), \quad (4.31)$$

e para não haver confusão iremos, sempre que necessário, explicitar as variáveis independentes. Agora vamos considerar uma pequena perturbação da condição de equilíbrio que pode ser escrita como:

$$f(x, \vec{\Pi}) = f(\vec{\Pi}) + \delta f(x, \vec{\Pi}). \quad (4.32)$$

Aqui $f(\vec{\Pi})$ é a função de equilíbrio, dada por (4.19). Os potenciais tanto vectoriais, quanto escalares também são considerados como variando levemente, assumindo as formas:

$$V^\mu = V^{(0)\mu} + \delta V^\mu, \quad (4.33)$$

$$\phi = \phi^{(0)} + \delta \phi, \quad (4.34)$$

com $V^{(0)\mu}$ e $\phi^{(0)}$ constantes.

A equação de Vlasov (4.28) aplicada a esta função de Wigner, com as devidas identidades, torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\vec{\Pi}) + \delta f \right) + \frac{\vec{\Pi}}{E_\Pi} \cdot \nabla \left(f(\vec{\Pi}) + \delta f \right) + \left[\frac{1}{E_\Pi} \left\{ \vec{\Pi} \times \left[\nabla \times \left(\vec{V}^{(0)} + \delta \vec{V} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[M - g_s \left(\phi^{(0)} + \delta \phi \right) \right] \nabla \left[M - g_s \left(\phi^{(0)} + \delta \phi \right) \right] \right\} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{V}^{(0)} + \delta \vec{V} \right) - \nabla \left(V^{(0)0} + \delta V^0 \right) \right] \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} \left(f(\vec{\Pi}) + \delta f \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

O próximo passo é expandir a E_Π até primeira ordem em $\delta \phi$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_{\Pi}} &= \frac{1}{\sqrt{\vec{\Pi}^2 + (M - g_s \phi^{(0)} - g_s \delta \phi)^2}} = \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} + \frac{(M - g_s \phi^{(0)}) g_s \delta \phi}{E_{\Pi}^{(0)3}} + \dots, \\ \frac{1}{E_{\Pi}} &= \frac{1}{\sqrt{\vec{\Pi}^2 + (M - g_s \phi^{(0)} - g_s \delta \phi)^2}} \approx \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E_{\Pi}^{(0)3}} g_s \delta \phi.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Vamos inserir esta equação em (4.35). Faremos o cálculo termo a termo até primeira ordem nas flutuações e, somente depois, iremos apresentar o resultado final. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(\vec{\Pi}) + \delta f) = \frac{\partial}{\partial t} \delta f, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}} \cdot (f(\vec{\Pi}) + \delta f) &= \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}} \cdot \nabla \delta f, \\ \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}} \cdot (f(\vec{\Pi}) + \delta f) &= \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \nabla \delta f,\end{aligned}\quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_{\Pi}} \left\{ \vec{\Pi} \times (\nabla \times \vec{V}^{(0)}) + \vec{\Pi} \times (\nabla \times \delta \vec{V}) + (M - g_s \phi^{(0)} - g_s \delta \phi) \nabla (g_s \delta \phi) \right\} \cdot \\ \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} (f(\vec{\Pi}) + \delta f) = \\ = \left\{ \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E_{\Pi}^{(0)3}} g_s \delta \phi \right\} \left\{ \vec{\Pi} \times (\nabla \times \delta \vec{V}) - g_s M^{(0)*} \nabla (\delta \phi) \right\} \cdot \\ \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} (f(\vec{\Pi}) + \delta f) \\ = \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} \left\{ \vec{\Pi} \times (\nabla \times \delta \vec{V}) - M^{(0)*} g_s \nabla (\delta \phi) \right\} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}),\end{aligned}\quad (4.39)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}^{(0)} + \delta \vec{V}) \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} (f(\vec{\Pi}) + \delta f) = - \frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}), \quad (4.40)$$

$$-\nabla \left(V^{(0)0} + \delta V^0 \right) \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} \left(f(\vec{\Pi}) + \delta f \right) = -\nabla \delta V^0 \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}). \quad (4.41)$$

Inserindo as equação (4.37)-(4.41) em (4.35) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \delta f + \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \nabla(\delta f) + \\ & + \left\{ \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \times \left(\nabla \times \delta \vec{V} \right) - \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \nabla(\delta \phi) - \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{V} - \nabla(\delta V^0) \right\} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}) = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para facilitar a obtenção das relações de dispersão, iremos trabalhar com as transformadas de Fourier das perturbações. Nós temos:

$$\begin{bmatrix} \delta \phi(x, \vec{\Pi}) \\ \delta f(x, \vec{\Pi}) \\ \delta V^\mu(x, \Pi) \end{bmatrix} = \int d^3 \vec{q} d\omega e^{i\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r}} \begin{bmatrix} \delta \phi(\vec{q}, \omega, \vec{\Pi}) \\ \delta f(\vec{q}, \omega, \vec{\Pi}) \\ \delta V^\mu(\vec{q}, \omega, \vec{\Pi}) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Inserindo estas transformadas em (4.42), obtemos:

$$\begin{aligned} i\omega \delta f - i \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \vec{q} \delta f + \left[i \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \times \left(\vec{q} \times \delta \vec{V} \right) + i \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \vec{q} \delta \phi - i\omega \delta \vec{V} + i\vec{q} \delta V^0 \right] \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i \left(\omega - \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \vec{q} \right) \delta f = \\
& i \left[\left(\omega - \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \vec{q} \right) \delta \vec{V} - \left(\delta V^0 - \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \delta \vec{V} + \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta \phi \right) \vec{q} \right] \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}), \\
& \delta f = \left[\delta \vec{V} - \frac{\left(\delta V^0 - \frac{\vec{\Pi}}{E_{\Pi}^{(0)}} \cdot \delta \vec{V} + \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta \phi \right)}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \vec{q} \right] \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f(\vec{\Pi}) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

sendo esta a equação para a perturbação da transformada da função de Wigner escalar. Nestes cálculos usamos as transformadas, embora não explicitamos as variáveis.

Para obtermos as relações de dispersão é necessário, antes, obter as densidades bariônicas e escalares para uso nas equações dos campos. A partir de agora iremos usar um sub-índice i , como em $f_i(x, \vec{\Pi})$. Este sub-índice indicará se estamos tratando de prótons ou nêutrons nas equações. Até agora esta distinção não era necessária, porém nas equações seguintes ela será. Reescrevendo a equação (4.22)

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{1}{E_{\Pi}} \Pi^\mu f_i(x, \vec{\Pi}), \quad (4.45)$$

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \sum_{i=p,n} j_i^\mu(x). \quad (4.46)$$

Lembrando que estamos tratando ainda de pequenas perturbações as equações (4.32), (4.33) e (4.34) continuam válidas.

Buscaremos escrever a corrente no seguinte formato:

$$j_i^\mu(x) = j_i^{(0)\mu}(x) + \delta j_i^\mu(x). \quad (4.47)$$

Tomando $\mu = 0$ em (4.45) obtemos:

$$j_i^0(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{1}{E_\Pi} \Pi_0 \left[f_i(\vec{\Pi}) + \delta f_i(x, \vec{\Pi}) \right]$$

Mas :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= E_\Pi \\ \Rightarrow \delta j_i^0(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \delta f_i. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para $\mu = k = 1, 2, 3$ temos :

$$j_i^k(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{1}{E_\Pi} \Pi^k \left[f_i(\vec{\Pi}) + \delta f_i(x, \vec{\Pi}) \right]$$

Usando a expansão (4.36) chegamos às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} j_i^k(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \Pi^k \left[\frac{1}{E_\Pi^{(0)}} + \frac{M^{(0)*} g_s}{E_\Pi^{(0)3}} \delta\phi \right] \left[f_i(\vec{\Pi}) + \delta f_i \right] \\ j_i^k(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \Pi^k \left[\frac{1}{E_\Pi^{(0)}} f_i(\vec{\Pi}) + \frac{M^{(0)*} g_s}{E_\Pi^{(0)3}} \delta\phi f_i(\vec{\Pi}) + \frac{\delta f_i}{E_\Pi^{(0)}} \right]. \end{aligned}$$

Note que $\delta\phi$ não depende de Π , de acordo com a equação (4.3). O primeiro e o segundo termos da equação anulam-se. Iremos provar que o primeiro anula-se, já que a dedução para o segundo termo é análoga. Portanto:

$$\int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^k}{E_\Pi^{(0)}} f_i(\vec{\Pi}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d\Pi_\perp \Pi_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty d\Pi_\parallel \Pi^k \frac{f_i(\vec{\Pi})}{E_\Pi^{(0)3}}.$$

Sabendo que: $\Pi^1 = \Pi_\perp \cos \phi$; $\Pi^2 = \Pi_\perp \sin \phi$ e $\Pi^3 = \Pi_\parallel$, temos para cada caso:

$$\Pi^1 : \quad \int_0^{2\pi} \cos \phi \int_0^\infty d\Pi_\perp \Pi_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty d\Pi_\parallel \frac{f_i(\vec{\Pi})}{E_\Pi^{(0)3}} = 0, \quad (4.49)$$

$$\Pi^2 : \quad \int_0^{2\pi} \sin \phi \int_0^\infty d\Pi_\perp \Pi_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty d\Pi_\parallel \frac{f_i(\vec{\Pi})}{E_\Pi^{(0)3}} = 0, \quad (4.50)$$

$$\Pi^3 : \quad \int_0^{2\pi} \phi \int_0^\infty d\Pi_\perp \Pi_\perp \int_{-\infty}^\infty d\Pi_\parallel \Pi_\parallel \frac{f_i(\vec{\Pi})}{E_\Pi^{(0)3}} = 0. \quad (4.51)$$

As duas primeiras integrais anulam-se na parte angular e a última integral anula-se na integral de Π_\parallel por se tratar uma função ímpar integrada em um intervalo simétrico em relação a origem. Isto fica claro se reescrevermos f em coordenadas esféricas:

$$f(\vec{\Pi}) = f(\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_3^2, \theta, \phi) = f(\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_\parallel^2, \theta, \phi). \quad (4.52)$$

Portanto a nossa corrente toma a forma:

$$j_i^k(x) = \delta j_i^k(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^k}{E_\Pi^{(0)}} \delta f_i. \quad (4.53)$$

Finalmente:

$$\delta j_i^\mu(x) = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \delta f_i, & \mu = 0 \\ \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^k}{E_\Pi^{(0)}} \delta f_i, & \mu = k \end{cases} \quad (4.54)$$

Realizamos um cálculo semelhante para a densidade escalar:

$$\begin{aligned} \rho_s^i &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{M^*}{E_\Pi^{(0)}} f_i(x, \vec{\Pi}) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{M - g_s \phi^{(0)} - g_s \delta \phi}{E_\Pi^{(0)}} (f_i(\vec{\Pi}) + \delta f_i(x, \vec{\Pi})), \end{aligned}$$

usando a expansão (4.36):

$$\begin{aligned} \rho_s^i &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \left(\frac{1}{E_\Pi^{(0)}} + \frac{M^{(0)*} g_s}{E_\Pi^{(0)3}} \delta \phi \right) (M^{(0)*} - g_s \delta \phi) (f_i(\vec{\Pi}) + \delta f_i) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{M^{(0)*}}{E_\Pi^{(0)}} f_i(\vec{\Pi}) + \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \left\{ \frac{M^{(0)*}}{E_\Pi^{(0)}} \delta f_i + \left[\frac{M^{(0)*2}}{E_\Pi^{(0)3}} - \frac{1}{E_\Pi^{(0)}} \right] g_s f_i(\vec{\Pi}) \delta \phi \right\}. \end{aligned}$$

Notamos também, que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \rho_s^{(0)i} &= \frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)}} f_i(\vec{\Pi}) \\
 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \left[\frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} f_i(\vec{\Pi}) - \frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)2}} f_i(\vec{\Pi}) \frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \sqrt{\vec{\Pi}^2 + M^{(0)*2}} \right] \\
 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \left[\frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} - \frac{M^{(0)*2}}{E_{\Pi}^{(0)3}} \right] f_i(\vec{\Pi}).
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Também, definindo:

$$d\rho_s^{(0)i} = \frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \rho_s^{(0)i}, \tag{4.56}$$

obtemos:

$$\delta \rho_s^i(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \left[\frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i - g_s d\rho_s^{(0)i} \delta \phi \right] \tag{4.57}$$

Desta forma conseguimos obter as variações na densidade escalar e nas correntes bariônicas causadas por uma pequena perturbação do equilíbrio. Elas são:

$$\delta j^\mu(x) = \sum_{i=p,n} \delta j_i^\mu(x), \tag{4.58}$$

com $\delta j_i^\mu(x)$ dado pela equação (4.54) e:

$$\delta \rho_s^i(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \left[\frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i - g_s d\rho_s^{(0)i} \delta \phi \right], \tag{4.59}$$

com $d\rho_s^{(0)i}$ dado pela equação (4.56). Estas duas equações são fundamentais para obtenção da relação de dispersão, como veremos mais adiante. Para facilitarmos o cálculo devemos tomar a transformada de Fourier das flutuações listadas acima, ou, de forma equivalente, tomar a transformada das funções que apresentam a dependência em x . Ou seja, devemos substituir:

$$\delta f_i(x, \vec{\Pi}) = \delta f_i(\omega, \vec{q}, \vec{\Pi}) \quad (4.60)$$

$$\delta \phi(x) = \delta \phi(\omega, \vec{q}), \quad (4.61)$$

nas (4.58) e (4.59).

No momento nós estamos trabalhando com cinco incógnitas (δf_i , $\delta \phi$, δV^μ , $\delta \rho_s^i$ e δj^μ) e conseguimos apenas três equações. Para completar o nosso conjunto de equações basta considerar as equações de campo. Neste trabalho iremos derivar explicitamente apenas uma das equações e expor as outras, que podem ser obtidas de maneira similar a apresentada. Por simplicidade iremos realizar o cálculo para o campo escalar. Sua equação é:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi + m_s^2 + \frac{k}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 &= g_s \rho_s, \\ \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi + m_s^2 + \frac{k}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 &= g_s \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \frac{M^*}{E_{\Pi}^{(0)}} f_i(x, \vec{\Pi}). \end{aligned}$$

Considerando as perturbações do campo e da densidade escalar (4.59) e, descontando a contribuição de equilíbrio, que, por estar nos dois lados da equação, anula-se, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \delta \phi - \nabla^2 \delta \phi + m_s^2 \delta \phi + k \phi^{(0)} \delta \phi + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} \delta \phi = \\ \frac{2}{(2\pi)^3} g_s \sum_{i=p,n} \int d^3 \vec{\Pi} \left[\frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i - g_s \left(\frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \rho_s^{(0)i} \right) \delta \phi \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

Definindo:

$$\tilde{m}_s^2 = m_s^2 + k \phi^{(0)} + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} + \frac{2}{(2\pi)^3} g_s^2 \sum_{i=p,n} \int d^3 \vec{\Pi} \frac{\partial}{\partial M^{(0)*}} \rho_s^{(0)i}. \quad (4.63)$$

Chegamos em:

$$\partial_t^2 \delta \phi - \nabla^2 \delta \phi + \tilde{m}_s \delta \phi = g_s \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \frac{M^{(0)*}}{\Pi^0} \delta f_i. \quad (4.64)$$

Fazendo a transformada de Fourier da (4.64):

$$\left[-\omega^2 + \vec{q}^2 + \vec{m}_s^2\right] \delta\phi(\vec{q}, \omega) = g_s \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{M^{(0)*}}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i(\vec{q}, \omega, \vec{\Pi}) \quad (4.65)$$

Para os outros campos obtemos equações semelhantes, através das suas respectivas equações:

$$\left[-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\omega^2\right] \delta\mathcal{V}^\mu(\vec{q}, \omega) = g_v \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^\mu}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i, \quad (4.66)$$

$$\left[-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\rho^2\right] \delta b^\mu(\vec{q}, \omega) = \frac{g_\rho}{2} \sum_{i=p,n} \tau_i \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^\mu}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i, \quad (4.67)$$

onde $\tau_p = 1$ e $\tau_n = -1$. Nós precisamos unir estes campos de maneira a obter o campo vetorial δV^μ com o qual viemos trabalhando. Lembrando que:

$$\delta V_i^\mu = g_v \delta\mathcal{V}^\mu + \frac{g_\rho}{2} \tau_i \delta b^\mu, \quad (4.68)$$

podemos inserir as equações (4.66)-(4.67) em (4.68):

$$\begin{aligned} \delta V_j^\mu = & \frac{g_\omega^2}{\left[-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\omega^2\right]} \sum_{i=p,n} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^\mu}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i + \\ & + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_j}{\left[-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\rho^2\right]} \sum_{i=p,n} \tau_i \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\Pi} \frac{\Pi^\mu}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_i. \end{aligned}$$

Relembrando a (4.54), a equação acima torna-se:

$$\delta V_i^\mu(\omega, \vec{q}) = \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_\omega^2}{-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\omega^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\rho^2} \right] \delta J_j^\mu(\omega, \vec{q}). \quad (4.69)$$

Com o conjunto de equações (4.44), (4.58), (4.59), (4.65) e (4.69) o problema esta resolvido. A solução rigorosa das equações para o caso mais geral possível é muito complexa e só pode ser realizada numericamente. En-

tretanto aplicações para alguns casos especiais são analiticamente solúveis.

4.4 ONDAS LONGITUDINAIS

Estudaremos a solução do conjunto de equações anteriores quando aplicadas ao caso particular de pequenas perturbações longitudinais, aqui chamadas de ondas longitudinais. Uma onda longitudinal é uma perturbação em uma determinada direção, aqui o eixo z . Ela toma a seguinte forma:

$$\delta \vec{V}_i = \delta V_{3i} \hat{k}, \quad (4.70)$$

onde o subíndice i diferencia prótons e nêutrons, como na seção anterior.

Sabemos que o potencial vetorial obedece a lei de conservação, ou seja:

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_i^\mu &= 0, \\ \partial_t \delta V_i^0 - \nabla \cdot \delta \vec{V}_i &= 0. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier de $\delta \vec{V}_i$, a equação torna-se:

$$\omega \delta V_i^0(\omega, \vec{q}, \vec{\Pi}) = \vec{q} \cdot \vec{V}_i(\omega, \vec{q}, \vec{\Pi}), \quad (4.71)$$

ou, aplicado à ondas longitudinais:

$$\omega \delta V_i^0(\omega, \vec{q}, \vec{\Pi}) = q_3 V_{3i}(\omega, \vec{q}, \vec{\Pi}). \quad (4.72)$$

Iremos necessitar deste resultado mais adiante.

Com as propriedades das ondas longitudinais, é possível reescrever (4.44):

$$\begin{aligned} \delta f_i = \delta V_{3i} \left[\frac{\partial}{\partial \Pi_3} f_i(\vec{\Pi}) + \frac{\frac{\Pi_3}{E_{\Pi}^{(0)}} \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \right] &- \frac{\delta V_{0i} \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} + \\ &- \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \frac{\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \delta \phi. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Inserindo o resultado (4.72) na equação anterior, obtemos:

$$\delta f_i = \delta V_i^0 \left[\frac{\omega}{q_3} \left(\frac{\partial}{\partial \Pi_3} f_i(\vec{\Pi}) + \frac{\frac{\Pi_3}{E_{\Pi}^{(0)}} \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \right) - \frac{\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \right] +$$

$$- \frac{M^{(0)*} g_s}{E_{\Pi}^{(0)}} \frac{\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \delta \phi. \quad (4.74)$$

Agora iremos inserir o resultado obtido na equação (4.54):

$$\delta j_i^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \delta f_i \quad (4.75)$$

$$\delta j_i^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \delta V_i^0 \left[\frac{\omega}{q_3} \left(\frac{\partial}{\partial \Pi_3} f_i(\vec{\Pi}) + \frac{\frac{\Pi_3}{E_{\Pi}^{(0)}} \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \right) - \frac{\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}} \right] +$$

$$- \frac{2}{(2\pi)^3} M^{(0)*} g_s \delta \phi \int d^3 \vec{\Pi} \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} \frac{\vec{q} \cdot \nabla_{\vec{\Pi}} f_i(\vec{\Pi})}{\omega - \frac{\vec{\Pi} \cdot \vec{q}}{E_{\Pi}^{(0)}}}. \quad (4.76)$$

A equação (4.76) envolve a solução de duas integrais que, embora trabalhosas, são solúveis no sistema de coordenadas esférico se levarmos em consideração a função de Wigner de equilíbrio $f_i(\vec{\Pi}) = \theta(E_{Fi} - E_{\Pi})$. Deixaremos os cálculos de lado, visto que envolve apenas matemática básica e sua demonstração não é significativamente esclarecedora. O resultado final é:

$$\delta j_i^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) \delta V_i^0 + \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} L(S_i) M^{(0)*} g_s \delta \phi, \quad (4.77)$$

onde E_{Fi} é a energia de Fermi correspondente a partícula i , e usamos as se-

guintes definições:

$$E_{Fi} = \sqrt{p_{Fi}^2 - M^{(0)*2}}, \quad (4.78)$$

$$S_i = \frac{\omega E_{Fi}}{q_3 p_{Fi}}, \quad (4.79)$$

$$L(x_0) = - \int dx \frac{x}{x_0 - x}. \quad (4.80)$$

O último passo para obtenção da relação de dispersão do sistema é a substituição de δV_i^0 e $\delta \phi$ pelas equações (4.65) e (4.69). Iniciando por $\delta \phi$:

$$[-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{(0)*} \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{\Pi} \frac{1}{E_{\Pi}^{(0)}} \delta f_j, \quad (4.81)$$

onde definimos $\omega_s^2 = \vec{q}^2 + \tilde{m}_s$. A equação (4.81) é semelhante a equação (4.75), portanto pode ser resolvida, resultando em:

$$[-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{(0)*} \sum_{j=p,n} \frac{\delta j_j^0}{E_{Fj}}. \quad (4.82)$$

Substituindo a equação anterior (4.82) e (4.69) na equação (4.77) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & \left(\sum_{j=p,n} \left[\frac{g_\omega^2}{-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\omega^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + \vec{q}^2 + m_\rho^2} \right] \delta j_j^0 \right) \times \\ & \times \frac{-1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} L(S_i) \frac{M^{(0)*} g_s^2}{[-\omega^2 + \omega_s^2]} \sum_{j=p,n} \frac{\delta j_j^0}{E_{Fj}}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Esta equação é idêntica a obtida pelo método de função geradora abordada na referência [10] e, se continuarmos com os cálculos e feitas as devidas substituições, conseguimos obter o mesmo resultado do artigo. Vale ressaltar que, embora tanto o artigo quanto esta dissertação usem a função de Wigner para obter a relação de dispersão, os métodos pelos quais ela é obtida são diferentes.

A relação de dispersão permite-nos calcular o comportamento dos modos coletivos, ou seja, o movimento de mésons e núcleons causado por pequenas perturbações do equilíbrio. Grandezas como velocidade dos modos coletivos, caracterização dos modos entre isoescalares ou isovetoriais, e a existência de modos instáveis na matéria nuclear são obtidos a partir destas relações. Devido a complexidade das relações, este tipo de estudo é essencialmente numérico, como feito no artigo [10]. A grande vantagem do método de Vlasov é que ele nos permite uma análise dos modos coletivos tanto dos núcleons quanto dos mésons diferentemente de outros métodos estudados na literatura, como a teoria de líquido de Fermi-Landau, que não leva em conta flutuações nos campos mesônicos.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Através deste trabalho desenvolvemos uma poderosa metodologia para obtenção de propriedades dos sistemas quantum-relativísticos, em especial suas relações de dispersão. Esta metodologia consiste no uso e manipulação da função de Wigner. Foi possível observar que o uso dela ocorre de maneira sistemática, já que após termos realizados o estudo para o caso da partícula livre, as modificações feitas para a aplicação no modelo $\sigma - \omega - \rho$ foram mínimas e bem justificadas. A utilização da função de Wigner para o estudo e obtenção de propriedades dos modelos efetivos mostrou-se ser viável.

Conseguimos, através da metodologia desenvolvida, obter as relações de dispersão para pequenas perturbações do equilíbrio. Este tipo de resultado permite estudar, por exemplo, como uma onda atravessa a matéria e sua influência sobre as propriedades da mesma. Além disso, quando aplicada numericamente, permite verificar a estabilidade dos sistemas, se estes possuem zonas de ressonância e as consequências destas para o sistema.

O próximo passo no projeto é a aplicação do formalismo da função de Wigner para sistemas sob um campo magnético. Embora a metodologia seja a mesma há algumas diferenças que tornam a tarefa mais complexa. A primeira delas surge na função de Wigner de equilíbrio. Enquanto a função dos nêutrons não muda, a dos prótons muda radicalmente e toma a forma:

$$f_p^{(0)} = \frac{2M^*}{(2\pi)^3} e^{-b_3^2} \left[\frac{\delta(E_\Pi^{(0)} - \Pi^0) \theta(E_F - E_\Pi^{(0)})}{E_\Pi^{(0)}} L_0(2b_3^2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{E_\Pi^{k+1}} \delta(E_\Pi^{k+1} - \Pi^0) \theta(E_F - E_\Pi^{k+1}) \{L_K(2b_3^2) - L_{k+1}(2b_3^2)\} \right],$$

onde $b_3^2 = \frac{\Pi_\perp^2}{eB_0}$, $E_n = \left\{ M^{*2} + \Pi_\parallel^2 + 2neB_0 \right\}^2$ e $L_k(x)$ é a função de Lagrange de ordem k .

Isto gera alguns problemas, principalmente na hora de efetuar a integral em Π^0 como foi feito nos cálculos do capítulo 4. Entretanto progresso nesta direção já está sendo feito e é uma questão de tempo até que possamos obter as relações de dispersão.

Resolvido este contratempo iremos proceder de forma muito semelhante à contida no artigo do Kelly de 1964, [35], onde ele aplica a função

de Wigner não covariante para um plasma de elétrons. Assim como no artigo citado, iremos utilizar uma expa a fim de nsão em Fourier-Bessel resolver a equação diferencial em coordenadas esféricas resultante. Esta transformação possui a seguinte forma:

$$f(\vec{q}, \omega, \vec{\Pi}) = e^{ib \sin \phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\phi} J_m(b) f^{(m)}(\vec{q}, \omega, \Pi_{\perp}, \Pi_{\parallel}), \quad (5.1)$$

onde $b = q_{\perp} \Pi_{\perp} / M^* \omega_c$, $\omega_c = eB_0 / M^*$ é a frequência de ciclotron do sistema, e $J_m(b)$ é a função de Bessel de ordem m .

Quando esta transformação é aplicada, a solução da equação diferencial resultante torna-se matematicamente simples, embora seja muito trabalhosa. Esperamos obter uma solução analítica para a relação de dispersão, pelo menos para algumas aplicações particulares, como ondas longitudinais e transversais.

Após a obtenção das relações de dispersão para este modelo, estaremos preparados para aplicar este arcabouço teórico para outros modelos efetivos, em geral mais simples, como o Nambu-Joana-Lasinio (NJL). Pretendemos, também, tentar uma aplicação deste método na cromodinâmica quântica, embora estes estudos ainda estejam em fase embrionária. Pelo que foi pesquisado até agora, é necessário a utilização de uma função de Wigner que seja invariante pelas transformações de gauge da QCD. Esta função de Wigner possui algumas diferenças vitais, que modificam o método desenvolvido. A teoria da função de Wigner invariante por transformações de Gauge pode ser encontrada, por exemplo, nos artigos de Heinz de 1985 e 1986, [28] e [29].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WIGNER, E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, American Physical Society, v. 40, n. 5, p. 749–759, jun. 1932. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.749>>.
- [2] WIGNER, E. P. P. In: *Perspectives in Quantum Theory*, eds. W. Yourgrau and A. van der Merwe (Dover, New York). [S.l.: s.n.], 1979. p. 25.
- [3] WEYL, H. Quantenmechanik und Gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 46, n. 1-2, p. 1–46, 1927. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02055756>>.
- [4] MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 45, n. 01, p. 99–124, 1949.
- [5] O'CONNELL, R. F.; WIGNER, E. P. Quantum-mechanical distribution functions: Conditions for uniqueness. *Physics Letters A*, v. 83, n. 4, p. 145–148, maio 1981. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960181908707>>.
- [6] CARRUTHERS, P.; ZACHARIASEN, F. Relativistic quantum transport theory approach to multiparticle production. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 13, n. 4, p. 950–960, fev. 1976. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.950>>.
- [7] HAKIM, R. Statistical mechanics of relativistic dense matter. *La Rivista Del Nuovo Cimento*, Società Italiana di Fisica, v. 1, n. 6, p. 1–49, 1978. ISSN 0393-697X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02724474>>.
- [8] HAKIM, R.; HEYVAERTS, J. Covariant Wigner function approach for relativistic quantum plasmas. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 18, n. 3, p. 1250–1260, set. 1978. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.18.1250>>.
- [9] HAKIM, R. *Introduction to Relativistic Statistical Mechanics: Classical and Quantum*. World Scientific, 2011. ISBN 9789814322430. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=PrwrRJy2vVAC>>.

- [10] AVANCINI, S. et al. Collective modes in relativistic asymmetric nuclear matter. *Physical Review C*, v. 71, n. 4, p. 044323, abr. 2005. ISSN 0556-2813. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.71.044323>>.
- [11] GLAUBER, R. J. Photon Correlations. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 10, n. 3, p. 84–86, fev. 1963. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.84>>.
- [12] SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 10, n. 7, p. 277–279, abr. 1963. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>>.
- [13] HUSSIMI, K. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, v. 22, p. 264, 1940.
- [14] MARGENAU, H.; HILL, R. N. Correlation between Measurements in Quantum Theory. *Progress of Theoretical Physics*, v. 26, n. 5, p. 722–738, nov. 1961. Disponível em: <<http://ptp.oxfordjournals.org/content/26/5/722.abstract>>.
- [15] COHEN, L. Generalized Phase-Space Distribution Functions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 7, n. 5, 1966.
- [16] GARDINER, P. D. D.; W, C. Generalised P-representations in quantum optics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 13, n. 7, p. 2353, 1980. ISSN 0305-4470. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/13/i=7/a=018>>.
- [17] DRUMMOND, P. D.; GARDINER, C. W.; WALLS, D. F. Quasiprobability methods for nonlinear chemical and optical systems. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 24, n. 2, p. 914–926, ago. 1981. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.24.914>>.
- [18] SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Co., 1994. ISBN 0201539292.
- [19] KLIMONTOVICH, Y. L. Dokl. Akad. Nauk. *Dokl. Akad. Nauk.*, v. 87, p. 927, 1952.
- [20] BISKAMP, D. No Title. *Zeits. Naturf.*, v. 22, n. a, p. 869, 1967.

- [21] BALESCU, R. No Title. *Acta Phys. Austriaca*, v. 28, p. 336, 1968.
- [22] BALESCU, R. No Title. *Acta Phys. Austriaca*, v. 29, p. 313, 1969.
- [23] WEERT, C. van; BOER, W. P. H. de. Relativistic kinetic theory of quantum systems: I. Wigner functions for a relativistic spin-1/2 system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 81, n. 4, p. 597–612, 1975. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037843717590076X>>.
- [24] GROOT, S. R.; LEEUWEN, W. A.; MELTZER, P. H. Transport coefficients of a neutrino gas. *Il Nuovo Cimento A Series 11*, Società Italiana di Fisica, v. 25, n. 2, p. 229–251, 1975. ISSN 0369-3546. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02729044>>.
- [25] HAKIM, R. D. T.; R. Sur la théorie cinétique du gaz d'électrons quantiques relativistes. In: *Bruxelles*. [S.l.: s.n.], 1976.
- [26] TENREIRO, R. D.; HAKIM, R. Transport coefficients of the relativistic degenerate electron gas in a strong magnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 10, n. 9, p. 1525, 1977. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/10/i=9/a=011>>.
- [27] TENREIRO, R. D.; HAKIM, R. Transport properties of the relativistic degenerate electron gas in a strong magnetic field: Covariant relaxation-time model. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 15, n. 6, p. 1435–1447, mar. 1977. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1435>>.
- [28] HEINZ, U. Quark-gluon transport theory I. The classical theory. *Annals of Physics*, v. 161, n. 1, p. 48–80, abr. 1985. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491685903367>>.
- [29] HEINZ, U. Quark-gluon transport theory II. Color response and color correlations in a quark-gluon plasma. *Annals of Physics*, v. 168, n. 1, p. 148–180, abr. 1986. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491686901144>>.
- [30] ELZE, H.-T.; GYULASSY, M.; VASAK, D. Transport equations for the QCD quark Wigner operator. *Nuclear Physics B*, v. 276, n. 3-4, p. 706–728, out. 1986. ISSN 0550-3213.

- [31] CALZETTA, E.; HU, B. L. Wigner distribution function and phase-space formulation of quantum cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 40, n. 2, p. 380–389, jul. 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.380>>.
- [32] ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory*. Dover Publications, 2012. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486134697. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=CxYCMNrUnTEC>>.
- [33] VASAK, D.; GYULASSY, M.; ELZE, H.-T. Quantum transport theory for abelian plasmas. *Annals of Physics*, v. 173, n. 2, p. 462–492, fev. 1987. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491687901692>>.
- [34] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Pearson Education, Incorporated, 2006. ISBN 9788177589160. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=lvmSZkzDFt0C>>.
- [35] KELLY, D. Dielectric Tensor for a Quantum Plasma. *Physical Review*, v. 134, n. 3A, p. A641–A649, maio 1964. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.134.A641>>.
- [36] HILLERY, M. et al. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Physics Reports*, v. 106, n. 3, p. 121–167, abr. 1984. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157384901601>>.

APÊNDICE A – CÁLCULOS DA SEÇÃO 2.2

1. Hermiticidade

$$\begin{aligned}
 F^*(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \left(\psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{2ipy/\hbar} \right)^* \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi(q+y) \psi^*(q-y) e^{-2ipy/\hbar} \\
 &= -\frac{1}{\pi\hbar} \int_{\infty}^{-\infty} dy \psi(q-y) \psi^*(q+y) e^{2ipy/\hbar} \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{2ipy/\hbar} \\
 F^*(q, p) &= F(q, p).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Hermitiano, e consequentemente real, como desejado.

2. Normalização

Posição:

$$\begin{aligned}
 \int dp F(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \iint dp dy e^{2ipy/\hbar} \psi^*(q+y) \psi(q-y) \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi^*(q+y) \psi(q-y) \int dp e^{2ipy/\hbar} \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \pi\hbar \int dy \psi^*(q+y) \psi(q-y) \delta(y) \\
 \int dp F(q, p) &= |\psi(q)|^2 = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Total:

$$\begin{aligned}
 \iint dq dp F(q, p) &= \int dq \langle q | \hat{p} | q \rangle \\
 \iint dq dp F(q, p) &= \text{Tr}(\hat{p}) = 1.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

3. Transformações de Galileu:

$$\psi(q) \rightarrow \psi'(q) = \psi(q+a)$$

leva a:

$$\begin{aligned} F'(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi'^*(q+y) \psi'(q-y) \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi^*(q+a+y) \psi(q+a-y) \end{aligned}$$

$$F'(q, p) = F(q+a, p). \quad (\text{A.3})$$

$$\psi(q) \rightarrow \psi'(q) = e^{ip'q/\hbar} \psi(q)$$

leva a:

$$\begin{aligned} F'(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi'^*(q+y) \psi'(q-y) \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} e^{-ip'(q+y)/\hbar} e^{ip'(q-y)/\hbar} \psi^*(q+y) \psi(q-y) \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2i(p-p')y/\hbar} \psi^*(q+y) \psi(q-y) \end{aligned}$$

$$F'(q, p) = F(q, p-p'). \quad (\text{A.4})$$

4. Reflexões:

Espacial:

Se

$$\psi(q) \rightarrow \psi'(q) = \psi(-q)$$

então:

$$\begin{aligned}
 F'(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi'^*(q+y) \psi'(q-y) \\
 &= -\frac{1}{\pi\hbar} \int_{\infty}^{-\infty} dy e^{2i(-p)(-y)/\hbar} \psi^*(-q-y) \psi(-q+y) \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2i(-p)y/\hbar} \psi^*(-q+y) \psi(-q-y) \\
 F'(q, p) &= F(-q, -p). \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Temporal:

Se

$$\psi(q) \rightarrow \psi'(q) = \psi^*(q)$$

então:

$$\begin{aligned}
 F'(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi'^*(q+y) \psi'(q-y) \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2ipy/\hbar} \psi(q+y) \psi^*(q-y) \\
 &= -\frac{1}{\pi\hbar} \int_{\infty}^{-\infty} dy e^{2i(-p)(-y)/\hbar} \psi^*(q-y) \psi(q+y) \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2i(-p)y/\hbar} \psi^*(q+y) \psi(q-y) \\
 F'(q, p) &= F(q, -p). \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

5. Para deduzir a equação de movimento seria necessário uma dedução das características dinâmicas da função de Wigner. Sendo esta dedução desnecessária para a continuidade do trabalho, esta propriedade será

apenas exposta e sua dedução pode ser encontrada em [36].

6. Prova de (2.27). Seja a descrição no espaço de fase $C(q, p)$ de um operador produto $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ de dois operadores, \hat{A} e \hat{B} , cujos correspondentes mapeados no espaço de fase são $A(q, p)$ e $B(q, p)$ respectivamente. Se \hat{A} e \hat{B} são matrizes n -dimensionais, para o caso mais geral possível, pode-se escrever:

$$\hat{C} = \int dx' \hat{A}(x, x') \hat{B}(x', x''). \quad (\text{A.7})$$

Para proceder é necessário a inversão da equação (2.28), como:

$$\begin{aligned} D(q, p) &= \int dz e^{ipz/\hbar} \hat{D}(q - 1/2z, q + 1/2z) \\ \int dp D(q, p) e^{-ipz'/\hbar} &= \int dz \hat{D}(q - 1/2z, q + 1/2z) \int dp e^{ip(z-z')/\hbar} \\ \int dp D(q, p) e^{-ipz'/\hbar} &= 2\pi\hbar \int dz \hat{D}(q - 1/2z, q + 1/2z) \delta(z - z') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{D}(q - 1/2z, q + 1/2z) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dp D(q, p) e^{-ipz/\hbar}. \quad (\text{A.8})$$

Para estes cálculos consideraremos $\hbar = 1$ por motivo de simplicidade. Para aplicar o resultado em (A.7) é necessário observar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 A : q_A &= 1/2(x + x'); \quad z_A = (x' - x) \\
 B : q_B &= 1/2(x' + x''); \quad z_B = (x'' - x') \\
 C : q_C &= 1/2(x + x''); \quad z_C = (x'' - x).
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \hat{C}(q_C - 1/2z_C, q_C + 1/2z_C) &= \int dx' \hat{A}(q_A - 1/2z_A, q_A + 1/2z_A) \\
 &\quad \hat{B}(q_B - 1/2z_B, q_B + 1/2z_B) \\
 \int dp''' C(q_C, p''') e^{-ip'''z_C} &= (2\pi)^{-1} \int \int \int dx' dp' dp'' A(q_A, p') e^{-ip'z_A} \\
 &\quad B(q_B, p'') e^{-ip''z_B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int dp''' C(1/2(x + x''), p''') e^{-ip'''(x'' - x)} &= (2\pi)^{-1} \int \int \int dx' dp' dp'' \\
 A(1/2(x + x'), p') e^{-ip'(x' - x)} &B(1/2(x' + x''), p'') e^{-ip''(x'' - x')}
 \end{aligned}$$

Fazendo $x = q + q'$ e $x'' = q - q'$:

$$\int dp''' C(q, p''') e^{2ip'''q'} = (2\pi)^{-1} \int \int \int dx' dp' dp''$$

$$A(1/2(q + q' + x'), p') e^{-ip'(x' - q - q')} B(1/2(x' + q - q'), p'') e^{-ip''(q - q' - x')}$$

$$\int \int dp''' dq' C(q, p''') e^{2iq'(p''' - p)} = (2\pi)^{-1} \int \int \int \int dq' dx' dp' dp''$$

$$A(1/2(q + q' + x'), p') B(1/2(x' + q - q'), p'') e^{-iq'(2p - p' - p'')} e^{-i(p'' - p')(q - x')}$$

Sejam $y = 1/2(q + x)$; $y' = 1/2q'$; $p' = \rho - \rho'$; $p'' = \rho + \rho'$

$$\pi \int dp''' C(q, p''') \delta(p''' - p) = (2\pi)^{-1} \int \int \int \int 2dy' 2dy 2d\rho dp'$$

$$A(y + y', \rho - \rho') B(y - y', \rho + \rho') e^{-4iy'(p - \rho)} e^{-4ip'(q - y)}$$

$$C(q, p) = 16 (2\pi)^{-2} \int \int \int \int dy' dy d\rho dp'$$

$$A(y + y', \rho - \rho') B(y - y', \rho + \rho') e^{4i(\rho y' + \rho' y)} e^{-4i(p y' + \rho' q)}$$

Integrando sobre q e p :

$$\int \int dp dq C(q, p) = 16 (2\pi)^{-2} \int \int \int \int dy' dy d\rho d\rho' \\ A(y+y', \rho-\rho') B(y-y', \rho+\rho') e^{4i(\rho y' + \rho' y)} \frac{4\pi^2}{16} \delta(y') \delta(\rho')$$

$$\int \int dp dq C(q, p) = \int \int dy d\rho A(y, \rho) B(y, \rho) \\ \int \int dp dq C(q, p) = \int \int dp dq A(q, p) B(q, p).$$

Sabe-se da equação(2.28) que o lado esquerdo da equação é igual a $\text{Tr}(\hat{C})$. Assim obtemos (2.27):

$$\int \int dp dq A(q, p) B(q, p) = (2\pi\hbar) \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}). \quad (\text{A.10})$$

7. Simentria $q - p$:

A transformada de Fourier da função de onda:

$$\phi(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dq \psi(q) e^{-ipq/\hbar}, \quad (\text{A.11})$$

sua inversa:

$$\psi(q) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dp \phi(p) e^{ipq/\hbar}. \quad (\text{A.12})$$

Inserindo-a em (2.14), obtem-se:

$$\begin{aligned}
F(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \, \psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{2ipy/\hbar} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \, e^{2ipy/\hbar} \int dp'' \, \phi^*(p'') e^{-i(q+y)p''/\hbar} \int dp' \, \phi(p') e^{i(q-y)p'/\hbar} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \, e^{2ipy/\hbar} \int dp'' \int dp' \, \phi^*(p'') \phi(p') e^{iq(p'-p'')/\hbar} e^{-iy(p'+p'')/\hbar} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp'' \int dp' \, \phi^*(p'') \phi(p') e^{iq(p'-p'')/\hbar} \int dy \, e^{iy(2p-p'-p'')/\hbar} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{2\pi\hbar}{2\pi\hbar} \int dp'' \int dp' \, \phi^*(p'') \phi(p') e^{iq(p'-p'')/\hbar} \delta(2p-p'-p'') \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \int dp'' \, \phi^*(p'') \phi(2p-p'') e^{iq(2p-2p'')/\hbar} \\
F(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dp' \, \phi^*(p+p') \phi(p-p') e^{-2iqp'/\hbar}. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Como desejado.

APÊNDICE B – CÁLCULOS DAS SEÇÕES 3.1 E 3.3

B.1 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.5)

$$\begin{aligned}
 J_A^\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A \psi(x) \\
 &= \int d^4 R \langle \psi | x + R/2 \rangle \langle x + R/2 | \gamma^\mu A | x - R/2 \rangle \langle x - R/2 | \psi \rangle \\
 &= \int d^4 R \langle x + R/2 | \gamma^\mu A | x - R/2 \rangle \psi(x - R/2) \bar{\psi}(x + R/2) \\
 J_A^\mu(x) &= \text{Sp} \int d^4 R \langle x + R/2 | \gamma^\mu A | x - R/2 \rangle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \blacksquare
 \end{aligned}$$

B.2 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.8)

$$\begin{aligned}
 \langle J_A^\mu(x) \rangle &= \text{Tr}\{\rho J_A^\mu(x)\} \\
 &= \text{Tr}\{\rho \text{Sp} \int d^4 R \gamma^\mu \langle x + R/2 | A | x - R/2 \rangle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2)\} \\
 &= \text{Sp} \int d^4 R \gamma^\mu \langle x + R/2 | A | x - R/2 \rangle \text{Tr}\{\rho \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2)\} \\
 \langle J_A^\mu(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4 R \gamma^\mu \langle x + R/2 | A | x - R/2 \rangle \langle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \rangle \blacksquare
 \end{aligned}$$

B.3 PROVA DE QUE A EQUAÇÃO (3.13) É IGUAL A EQUAÇÃO (3.8)

$$\langle J_A^\mu(x) \rangle = \text{Sp} \int d^4 p \gamma^\mu A(x, p) F(x, p)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4 p \, \gamma^\mu \int d^4 R' \, e^{ip \cdot R'} \langle x + R'/2 | A | x - R'/2 \rangle \times \\
&\quad \times \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \langle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4 R \int d^4 R' \, \gamma^\mu \langle x + R'/2 | A | x - R'/2 \rangle \times \\
&\quad \times \langle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \rangle \int d^4 p e^{-ip \cdot (R - R')} \\
&= \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4 R \int d^4 R' \, \gamma^\mu \langle x + R'/2 | A | x - R'/2 \rangle \times \\
&\quad \times \langle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \rangle \delta^4(R - R') \\
&= \text{Sp} \int d^4 R \, \gamma^\mu \langle x + R/2 | A | x - R/2 \rangle \langle \bar{\psi}(x + R/2) \otimes \psi(x - R/2) \rangle \blacksquare
\end{aligned}$$

B.4 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES (3.15) E (3.16)

Para o cálculo de (3.15) é necessário, antes, calcular a função $J^\mu(x, p)$ a partir de (3.14):

$$\begin{aligned}
J(x, p) &= \int d^4 R \, e^{ip \cdot R} \langle x + R/2 | I | x - R/2 \rangle \\
&= \int d^4 R \, e^{ip \cdot R} \langle x + R/2 | x - R/2 \rangle \\
&= \int d^4 R \, e^{ip \cdot R} \delta^4(R) \\
J(x, p) &= e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Agora basta inserir este valor na equação (3.13), obtendo:

$$\begin{aligned}\langle J^\mu(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4R \, \gamma^\mu J(x, p) F(x, p) \\ \langle J^\mu(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4R \, \gamma^\mu F(x, p) \blacksquare\end{aligned}$$

Para o cálculo de (3.16) procede-se de forma análoga:

$$\begin{aligned}T^\mu(x, p) &= \frac{i}{2} \int d^4R \, e^{ip \cdot R} \langle x + R/2 | \overleftrightarrow{\partial}^\mu | x - R/2 \rangle \\ &= \frac{i}{2} \int d^4R \, e^{ip \cdot R} \{ \langle \partial^\mu(x + R/2) | x - R/2 \rangle + \langle x + R/2 | \partial^\mu(x - R/2) \rangle \} \\ &= \frac{i^2}{2} \int d^4R \, e^{ip \cdot R} \{ \langle p^\mu(x + R/2) | x - R/2 \rangle + \langle x + R/2 | p^\mu(x - R/2) \rangle \} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4R \, e^{ip \cdot R} \left\{ -i \frac{d}{d(x + R/2)_\mu} \delta^4((x + R/2) - (x - R/2)) + \right. \\ &\quad \left. -i \frac{d}{d(x - R/2)_\mu} \delta^4((x - R/2) - (x + R/2)) \right\} \\ &= \frac{i}{2} \int d^4R \, e^{ip \cdot R} 2 \frac{d}{dR_\mu} \delta^4(R) \\ &= -i \int d^4R \frac{d}{dR_\mu} (e^{ip \cdot R}) \delta^4(R) \\ &= -i^2 p^\mu e^0\end{aligned}$$

$$T^\mu(x, p) = p^\mu.$$

Novamente basta inserir o resultado obtido na equação (3.13):

$$\begin{aligned}\langle T^{\mu\nu}(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4R \, \gamma^\mu T^\nu(x, p) F(x, p) \\ \langle T^{\mu\nu}(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4R \, \gamma^\mu p^\nu F(x, p) \blacksquare\end{aligned}$$

B.5 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.22)

Deve-se partir de (3.21), que foi reproduzida abaixo:

$$\begin{cases} [i\gamma \cdot \vec{\partial} - m]\psi(x) = 0 \\ \bar{\psi}(x)[i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} + m] = 0. \end{cases}$$

Será feito o cálculo para a primeira equação, sendo o cálculo da segunda semelhante. Inicialmente é necessário avaliar a equação em $x' = x - R/2$, tomando forma:

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial}' - m)\psi(x') = 0. \quad (\text{B.1})$$

É necessário avaliar a derivada para o uso nos próximos passos, assim:

$$\begin{aligned} \vec{\partial}' &= \frac{\vec{\partial}}{\partial(x - R/2)} \\ &= \frac{\partial R}{\partial(x - R/2)} \frac{\vec{\partial}}{\partial R} \\ &= \frac{1}{\frac{\partial(x - R/2)}{\partial R}} \frac{\vec{\partial}}{\partial R} \\ \vec{\partial}' &= -2 \frac{\vec{\partial}}{\partial R}. \end{aligned}$$

Isto é válido para funções apenas de R . Fazendo $x'' = x + R/2$ e multiplicando alguns termos em (B.1):

$$\bar{\psi}_\beta(x'') e^{-ip \cdot R} (i\gamma \cdot \vec{\partial}' - m)\psi_\alpha(x') = 0. \quad (\text{B.2})$$

O próximo passo é calcular o seguinte comutador:

$$\begin{aligned}
 [e^{-ip \cdot R}, i\gamma \cdot \vec{\partial}'] \psi(x') &= e^{-ip \cdot R} (i\gamma \cdot \vec{\partial}') \psi(x') - (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (e^{-ip \cdot R} \psi(x')) \\
 &= e^{-ip \cdot R} (i\gamma \cdot \vec{\partial}') \psi(x') - e^{-ip \cdot R} (i\gamma \cdot \vec{\partial}') \psi(x') + \\
 &\quad - (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (e^{-ip \cdot R}) \psi(x') \\
 &= -(i(-2)(-i)\gamma \cdot p) e^{-ip \cdot R} \psi(x') \\
 [e^{-ip \cdot R}, i\gamma \cdot \vec{\partial}'] \psi(x') &= (2\gamma \cdot p) e^{-ip \cdot R} \psi(x').
 \end{aligned}$$

Efetuada a comutação em (B.2):

$$\tilde{\psi}_\beta(x'') (i\gamma \cdot \vec{\partial}' + 2\gamma \cdot p - m) e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x') = 0. \quad (\text{B.3})$$

Novamente é necessário efetuar a comutação e, consequentemente, calcular o comutador. Entretanto, antes disso, é necessário um cálculo intermediário:

$$\begin{aligned}
i\gamma \cdot \vec{\partial}' \bar{\psi}_\beta(x'') &= i\gamma \cdot \frac{\partial x''}{\partial x'} \frac{\vec{\partial}}{\partial x''} \bar{\psi}_\beta(x'') \\
&= i\gamma \cdot \left(\frac{\partial x'}{\partial x''} + \frac{\partial R}{\partial x'} \right) \vec{\partial}'' \bar{\psi}_\beta(x'') \\
&= i\gamma \cdot (1 - 2) \vec{\partial}'' \bar{\psi}_\beta(x'') \\
&= -\bar{\psi}_\beta(x'') (i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}'') \\
i\gamma \cdot \vec{\partial}' \bar{\psi}_\beta(x'') &= m \bar{\psi}_\beta(x'').
\end{aligned}$$

Agora o cálculo do comutador:

$$\begin{aligned}
[\bar{\psi}_\beta(x''), i\gamma \cdot \vec{\partial}'] e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x') &= \bar{\psi}_\beta(x'') (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x')) + \\
&\quad - (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (\bar{\psi}_\beta(x'') e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x')) \\
&= \bar{\psi}_\beta(x'') (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x')) + \\
&\quad - \bar{\psi}_\beta(x'') (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x')) + \\
&\quad - (i\gamma \cdot \vec{\partial}') (\bar{\psi}_\beta(x'')) e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x') \\
[\bar{\psi}_\beta(x''), i\gamma \cdot \vec{\partial}'] e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x') &= -m \bar{\psi}_\beta(x'') e^{-ip \cdot R} \psi_\alpha(x').
\end{aligned}$$

Efetuada a comutação em (B.3):

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial}' + 2(\gamma \cdot p - m)) e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x'') \psi_\alpha(x') = 0. \quad (\text{B.4})$$

E para finalizar basta integrar em R :

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial} + 2(\gamma \cdot p - m)) \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2) = 0$$

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial} + 2(\gamma \cdot p - m)) \hat{F}(x, p) = 0$$

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial} + 2(\gamma \cdot p - m)) \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{F}(x, p)) = 0$$

$$(i\gamma \cdot \vec{\partial} + 2(\gamma \cdot p - m)) F(x, p) = 0 \blacksquare$$

APÊNDICE C – REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE WIGNER

Primeiramente iremos reescrever a primeira equação da (3.22), dada por:

$$(i\gamma \cdot \partial + 2\gamma \cdot p - 2m)F(x, p) = 0, \quad (\text{C.1})$$

da seguinte forma:

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)F(x, p) = 0, \quad (\text{C.2})$$

onde $P^\mu = 1/2i\partial^\mu + p^\mu$. Durante as deduções que seguem muitas das propriedades das matrizes de Dirac foram usadas, frequentemente sem apontar explicitamente qual. Uma lista completa destas propriedades pode ser encontrada em [9]. Vamos agora manipular a (C.2):

- $\text{Tr}(\text{C.2})$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu P^\mu F) - \text{Tr}(mF) &= 0 \\ P_\mu \text{Tr}(\gamma^\mu F) - m\text{Tr}(F) &= 0 \\ P_\mu f^\mu - mf &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

- $\text{Tr}(\gamma_5 (\text{C.2}))$:

$$\begin{aligned} P^\mu \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu F) - m\text{Tr}(\gamma_5 F) &= 0 \\ P^\mu f_{5\mu} - imf_5 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

- $\text{Tr}(\gamma_\mu \text{ (C.2)})$:

$$P^\nu \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu F) - m \text{Tr}(\gamma_\mu F) = 0$$

Partes:

$$\begin{aligned} P^\nu \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu F) &= P^\nu \text{Tr} \left[\left(\gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu \right) F \right] \\ &= P^\nu \text{Tr} \left[(1/2 \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} + 1/2 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) F \right] \\ &= P^\nu \text{Tr} [(g_{\mu\nu} I_4 - i \sigma_{\mu\nu}) F] \\ &= P_\mu \text{Tr}(F) - i P^\nu \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} F) \\ &= 4(P_\mu f - i P^\nu f_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Voltando:

$$\begin{aligned} 4(P_\mu f - i P^\nu f_{\mu\nu}) - 4m f_\mu &= 0 \\ P_\mu f - i P^\nu f_{\mu\nu} - m f_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{C.5}$$

- $\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \text{ (C.2)})$:

$$P^\nu \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu F) - m \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu F) = 0$$

Partes:

$$\begin{aligned}
 P^\nu \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu F) &= P^\nu \text{Tr}[\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu) F] \\
 &= P^\nu \text{Tr}[(\gamma_5 (g_{\mu\nu} I_4 - i \sigma_{\mu\nu})) F] \\
 &= P_\mu \text{Tr}(\gamma_5 F) - i P^\nu \text{Tr}(\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} F) \\
 &= 4i P_\mu f_5 - i P^\nu \text{Tr} \left(\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} F \right) \\
 &= 4 \left(i P_\mu f_5 + \frac{1}{2} P^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 4 \left(i P_\mu f_5 + \frac{1}{2} P^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right) - 4m f_{5\mu} &= 0 \\
 i P_\mu f_5 + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu f^{\alpha\beta} - m f_{5\mu} &= 0. \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

- $\text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} \text{ (C.2)})$:

$$\begin{aligned}
 P^\alpha \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} \gamma_\alpha F) - m \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} F) &= 0 \\
 \frac{i}{2} P^\alpha (\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha F) - \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha F)) - 4m f_{\mu\nu} &= 0
 \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha = (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \gamma^\beta + i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\beta$$

Calculamos o primeiro termo:

$$\begin{aligned}
 P^\alpha \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha F) &= P^\alpha \text{Tr} \left((g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \gamma^\beta + i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\beta \right) F \\
 &= P_\mu \text{Tr}(\gamma_\nu F) - P_\nu \text{Tr}(\gamma_\mu F) + i P^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(\gamma^\beta F) \\
 P^\alpha \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha F) &= 4(P_\mu f_\nu - P_\nu f_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha f_5^\beta).
 \end{aligned}$$

E para o segundo item :

$$P^\alpha \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha F) = 4(P_\nu f_\mu - P_\mu f_\nu + i \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} P^\alpha f_5^\beta).$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{2} 4 \left(2(P_\mu f_\nu - P_\nu f_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha f_5^\beta) \right) - 4m f_{\mu\nu} &= 0 \\
 i(P_\mu f_\nu - P_\nu f_\mu) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha f_5^\beta - m f_{\mu\nu} &= 0. \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

As equações (C.3), (C.4), (C.5), (C.6) e (C.7) são complexas, logo podem ser separadas em suas partes real e imaginária. Abaixo elas estão reescritas e em seguida são separadas, sabendo que $P_\mu = i/2 \hbar \partial_\mu + p_\mu$. Note que agora voltamos a explicitar o termo \hbar que será útil durante a aproximação semi-clássica.

$$P_\mu f^\mu - mf = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$P^\mu f_{5\mu} - imf_5 = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$P_\mu f - iP^\nu f_{\mu\nu} - mf_\mu = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$iP_\mu f_5 + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu f^{\alpha\beta} - mf_{5\mu} = 0 \quad (\text{C.11})$$

$$i(P_\mu f_\nu - P_\nu f_\mu) - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha f_5^\beta - mf_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.12})$$

Parte real:

$$p_\mu f^\mu - mf = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$\hbar\partial^\mu f_{5\mu} - 2mf_5 = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$2p_\mu f + \hbar\partial^\nu f_{\mu\nu} - 2mf_\mu = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$-\hbar\partial_\mu f_5 + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\nu f^{\alpha\beta} - 2mf_{5\mu} = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$-\hbar(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha f_5^\beta - 2mf_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.17})$$

Parte Imaginária:

$$\hbar\partial_\mu f^\mu = 0 \quad (\text{C.18})$$

$$p^\mu f_{5\mu} = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\hbar\partial_\mu f - 2p^\nu f_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$4p_\mu f_5 + \hbar\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu f^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$2(p_\mu f_\nu - p_\nu f_\mu) - \hbar\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha f_5^\beta = 0 \quad (\text{C.22})$$

Agora vamos resolver estas equações para f_5 , f_μ e $f_{\mu\nu}$. Iniciamos com (C.14):

$$f_5 = \frac{\hbar}{2m} \partial^\mu f_{5\mu}. \quad (\text{C.23})$$

Isolando f_μ em (C.15), obtemos:

$$f_\mu = \frac{p_\mu}{m} f + \frac{\hbar}{2m} \partial^\nu f_{\mu\nu}. \quad (\text{C.24})$$

Agora, resolvendo (C.17) para $f_{\mu\nu}$:

$$f_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{2m} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) - \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{m} p^\alpha f_5^\beta. \quad (\text{C.25})$$

Inserindo (C.25) em (C.24) com termos até primeira ordem em \hbar :

$$f_\mu = \frac{p_\mu}{m} f - \frac{\hbar}{2m^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha \partial^\nu f_5^\beta. \quad (\text{C.26})$$

E, finalmente, inserindo (C.26) em (C.25), novamente em primeira ordem em \hbar :

$$f_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{2m^2} (p_\nu \partial_\mu - p_\mu \partial_\nu) f - \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{m} p^\alpha f_5^\beta. \quad (\text{C.27})$$

Portanto, as 16 decomposições da função de Wigner não são independentes. Na verdade, apenas 5 delas são necessárias, sendo estas f e $f_{5\mu}$.

APÊNDICE D – FUNÇÃO DE WIGNER DE EQUILÍBRIO

A função que precisamos calcular:

$$f(p) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \langle \bar{\psi}(x + 1/2R) \psi(x - 1/2R) \rangle. \quad (D.1)$$

Expansão da solução da equação de Dirac em ondas planas:

$$\psi(x) = \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\vec{p}) \bar{v}(\vec{p}) e^{ip \cdot x}] \quad (D.2)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a^\dagger(\vec{p}) \bar{u}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + b(\vec{p}) v(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}], \quad (D.3)$$

com a definição:

$$E_p^2 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (D.4)$$

Condições de normalização próximas às encontradas em [9]:

- Ortonormalidade:

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}) = \bar{v}_\alpha(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}) = 2m \\ \bar{u}_\alpha(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (D.5)$$

- Segunda Quantização:

$$\{a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')\} = \{b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (D.6)$$

- Estatística

$$\left\{ \begin{aligned} \langle a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}') \rangle &= \frac{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')}{e^{\beta(E_p-E_F)+1}} \\ \langle b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}') \rangle &= \frac{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')}{e^{\beta(E_p+E_F)+1}} \\ \langle a^\dagger(\vec{p})b^\dagger(\vec{p}') \rangle &= \langle a(\vec{p})b(\vec{p}') \rangle = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{D.7})$$

Com E_F sendo a energia de Fermi. Aqui vamos definir o peso estatístico como:

$$n_{\pm}^p = \left(e^{\beta(E_p \pm E_F)} + 1 \right)^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

Agora basta calcular. Nos cálculos seguintes já desconsideramos os termos mistos por simplicidade, já que eles irão anular-se:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x+R/2)\psi(x-R/2) &= \\ &= \iint d^3\vec{p}' d^3\vec{p}'' \frac{1}{2\sqrt{E_{p'}E_{p''}}} \left[\left\{ a^\dagger(\vec{p}'')\bar{u}(\vec{p}'')e^{ip'' \cdot (x+R/2)} + b(\vec{p}'')v(\vec{p}'')e^{-ip'' \cdot (x+R/2)} \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ a(\vec{p}')u(\vec{p}')e^{-ip' \cdot (x+R/2)} + b^\dagger(\vec{p}')\bar{v}(\vec{p}')e^{ip' \cdot (x+R/2)} \right\} \right] \\ 1 &= \iint d^3\vec{p}' d^3\vec{p}'' \frac{1}{2\sqrt{E_{p'}E_{p''}}} \left[a^\dagger(\vec{p}'')a(\vec{p}')\bar{u}(\vec{p}'')u(\vec{p}')e^{i[p'' \cdot (x+R/2) - p' \cdot (x-R/2)]} + \right. \\ &\quad \left. + b(\vec{p}'')b^\dagger(\vec{p}')\bar{v}(\vec{p}'')v(\vec{p}')e^{-i[p'' \cdot (x+R/2) - p' \cdot (x-R/2)]} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint d^3 \vec{p}' d^3 \vec{p}'' \frac{1}{2\sqrt{E_{p'} E_{p''}}} [a^\dagger(\vec{p}'') a(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}'') u(\vec{p}') e^{i[p''-p'] \cdot x} e^{i[p''+p'] \cdot R/2} + \\
 &\quad + b^\dagger(\vec{p}'') b(\vec{p}') \bar{v}(\vec{p}'') v(\vec{p}') e^{-i[p''-p'] \cdot x} e^{-i[p''+p'] \cdot R/2} + O]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\langle \bar{\Psi}(x+R/2) \Psi(x-R/2) \rangle = \\
 &= \iint d^3 \vec{p}' d^3 \vec{p}'' \frac{1}{2\sqrt{E_{p'} E_{p''}}} [\langle a^\dagger(\vec{p}'') a(\vec{p}') \rangle \bar{u}(\vec{p}'') u(\vec{p}') e^{i[p''-p'] \cdot x} e^{i[p''+p'] \cdot R/2} + \\
 &\quad + \langle b^\dagger(\vec{p}'') b(\vec{p}') \rangle \bar{v}(\vec{p}'') v(\vec{p}') e^{-i[p''-p'] \cdot x} e^{-i[p''+p'] \cdot R/2}] + O
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint d^3 \vec{p}' d^3 \vec{p}'' \frac{1}{2\sqrt{E_{p'} E_{p''}}} [\delta^3(\vec{p}'' - \vec{p}') n_-^{p'} \bar{u}(\vec{p}'') u(\vec{p}') e^{i[E_{p''}-E_{p'}]x_0} e^{-i[\vec{p}''-\vec{p}'] \cdot \vec{x}} \times \\
 &\quad \times e^{i[E_{p''}+E_{p'}]R_0/2} e^{-i[\vec{p}''+\vec{p}'] \cdot \vec{R}/2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \delta^3(\vec{p}'' - \vec{p}') n_+^{p'} \bar{v}(\vec{p}'') v(\vec{p}') e^{-i[E_{p''}-E_{p'}]x_0} e^{i[\vec{p}''-\vec{p}'] \cdot \vec{x}} \times \\
 &\quad \times e^{-i[E_{p''}+E_{p'}]R_0/2} e^{i[\vec{p}''+\vec{p}'] \cdot \vec{R}/2}
 \end{aligned}$$

$$= \int d^3 \vec{p}' \frac{m}{E_{p'}} \left[e^{iE_{p'} R_0} e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{R}} n_-^{p'} + e^{-iE_{p'} R_0} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{R}} n_+^{p'} \right] + O$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \langle \bar{\psi}(x+R/2) \psi(x-R/2) \rangle = \\
& = \frac{1}{2^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \iint dR_0 d^3 \vec{p}' \frac{m}{E_{p'}} [e^{iE_{p'} R_0} e^{-ip_0 R_0} n_-^{p'} \int d^3 \vec{R} e^{-i[\vec{p}+\vec{p}'] \cdot \vec{R}} + \\
& \quad e^{-iE_{p'} R_0} e^{-ip_0 R_0} n_+^{p'} \int d^3 \vec{R} e^{-i[\vec{p}-\vec{p}'] \cdot \vec{R}}] + O \\
& = \frac{1}{2^2} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^4} \iint dR_0 d^3 \vec{p}' \frac{m}{E_{p'}} \left[e^{-i[p_0-E_{p'}]R_0} n_-^{p'} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') + \right. \\
& \quad \left. + e^{-i[p_0+E_{p'}]R_0} n_+^{p'} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \right] + O \\
& = \frac{1}{2^2} \frac{1}{(2\pi)} \int dR_0 \frac{m}{E_p} \left[e^{-i[p_0-E_p]R_0} n_-^p + e^{-i[p_0+E_p]R_0} n_+^p \right] + O \\
& = \frac{1}{2^2} \frac{2\pi}{(2\pi)} \frac{m}{E_p} [\delta(p_0-E_p) n_-^p + \delta(p_0+E_p) n_+^p] + O \\
& = \frac{1}{2^2} \frac{m}{E_p} \left[\delta(p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2)) n_-^p - 2E_p \theta(p_0) + \right. \\
& \quad \left. + \delta(p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2)) n_+^p - 2E_p \theta(-p_0) \right] + O
\end{aligned}$$

Onde θ é a função de Heaviside. Finalmente obtemos a equação desejada:

$$f = \frac{m}{2} \delta(p^2 - m^2) \left[\frac{\theta(p_0)}{e^{\beta(E_p - E_F)} + 1} + \frac{\theta(-p_0)}{e^{\beta(E_p + E_F)} + 1} \right] + O \quad (D.9)$$

APÊNDICE E – CÁLCULO DA EQUAÇÃO (4.11)

Partimos da equação para o campo, dada por:

$$(i\gamma_\mu D^\mu - M^*) \psi = 0. \quad (\text{E.1})$$

Através de cálculos semelhantes aos desenvolvidos no apêndice B5 chegamos a uma equação análoga a equação (B.4):

$$\begin{aligned} & \left(i\gamma_\mu \partial^{\mu'} - 2\gamma_\mu V^\mu(x') + 2\gamma_\mu p^\mu - 2M + 2g_s \phi(x') \right) e^{-ip \cdot R} \tilde{\psi}_\beta(x'') \psi_\alpha(x') = 0 \\ & \left(i\gamma_\mu \partial^{\mu'} + 2\gamma_\mu p^\mu - 2M \right) e^{-ip \cdot R} \tilde{\psi}_\beta(x'') \psi_\alpha(x') = \\ & = \left(2\gamma_\mu V^\mu(x') - 2g_s \phi(x') \right) e^{-ip \cdot R} \tilde{\psi}_\beta(x'') \psi_\alpha(x') \\ & \left(i\gamma_\mu \partial^{\mu'} + 2\gamma_\mu p^\mu - 2M \right) \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \tilde{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2) = \\ & = 2 \int d^4 R \left(\gamma_\mu V^\mu(x - R/2) - g_s \phi(x - R/2) \right) e^{-ip \cdot R} \tilde{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2). \quad (\text{E.2}) \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta equação já está resolvido, portanto iremos concentrar nossos esforços no lado direito. Sabemos que podemos expandir $V^\mu(x - R/2)$ como:

$$\begin{aligned} V^\mu(x - R/2) &= V^\mu(x) + \frac{\partial V^\mu}{\partial x} \Big|_x (-R/2) + \frac{\partial^2 V^\mu}{\partial x^2} \Big|_x (-R/2)^2 + \dots \\ V^\mu(x - R/2) &= e^{-1/2 R_\nu \partial^\nu} V^\mu(x), \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

onde definimos $(\partial^\nu)^n = \frac{\partial^n}{\partial x_\mu^n}$. Analogamente, existe uma relação para $\phi(x - R/2)$:

$$\phi(x - R/2) = e^{-1/2R_\mu \partial^\mu} \phi(x). \quad (\text{E.4})$$

Assim:

$$\begin{aligned} 2 \int d^4 R \left(\gamma_\mu V^\mu(x - R/2) - g_s \phi(x - R/2) \right) e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2) = \\ = 2 \int d^4 R e^{-1/2R_\mu \partial^\mu} \left(\gamma_\mu V^\mu(x) - g_s \phi(x) \right) e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2), \end{aligned}$$

mas, sabemos que:

$$\begin{aligned} e^{-ip \cdot R} e^{-1/2R_\mu \partial^\mu} &= e^{-ip \cdot R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \frac{R_\mu^n (\partial^\mu)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \frac{R_\mu^n (\partial^\mu)^n}{n!} e^{-ip \cdot R}. \end{aligned}$$

Levando em consideração que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{(\partial p^\mu)^n} e^{-ip^\mu R_\mu} &= (-iR_\mu)^n e^{-ip^\mu R_\mu} \\ (\partial_\mu^p)^n e^{-ip^\mu R_\mu} &= (-i)^n R_\mu^n e^{-ip^\mu R_\mu}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Assim:

$$\begin{aligned} e^{-ip \cdot R} e^{-1/2R_\mu \partial^\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{2} \right)^n \frac{(\partial^\mu)^n (\partial_\mu^p)^n}{n!} e^{-ip \cdot R} \\ e^{-ip \cdot R} e^{-1/2R_\mu \partial^\mu} &= e^{-i/2 \partial^\mu \partial_\mu^p} e^{-ip \cdot R}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 2 \int d^4 R \left(\gamma_\mu V^\mu(x - R/2) - g_s \phi(x - R/2) \right) e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2) = \\
 = 2e^{-i/2} \partial^\mu \partial_\mu^p \left(\gamma_\mu V^\mu(x) - g_s \phi(x) \right) \int d^4 R e^{-ip \cdot R} \bar{\psi}_\beta(x + R/2) \psi_\alpha(x - R/2) \\
 = 2e^{-i/2} \partial^\mu \partial_\mu^p \left(\gamma_\mu V^\mu(x) - g_s \phi(x) \right) F(x, p).
 \end{aligned}$$

Onde os operadores ∂^μ e ∂_μ^p , contidos em $e^{-i/2} \partial^\mu \partial_\mu^p$, atuam em $(\gamma_\mu V^\mu(x) - g_s \phi(x))$ e $F(x, p)$ respectivamente. Retornando à equação (E.2):

$$(i\gamma \cdot \partial + 2\gamma \cdot p - 2M) F(x, p) = 2e^{-i/2} \partial^\mu \partial_\mu^p (\gamma \cdot V(x) - g_s \phi(x)) F(x, p), \quad (\text{E.7})$$

ou, explicitando \hbar :

$$(i\hbar\gamma \cdot \partial + 2\gamma \cdot p - 2M) F(x, p) = 2e^{-i/2} \hbar \partial^\mu \partial_\mu^p (\gamma \cdot V(x) - g_s \phi(x)) F(x, p). \quad (\text{E.8})$$

Expandindo a exponencial em primeira ordem em \hbar :

$$e^{-i/2} \hbar \partial^\mu \partial_\mu^p \approx \left(1 - \frac{i\hbar}{2} \partial^\mu \partial_\mu^p \right). \quad (\text{E.9})$$

Assim:

$$(i\hbar\gamma \cdot \partial + 2\gamma \cdot p - 2M) F(x, p) = 2 \left(1 - \frac{i\hbar}{2} \partial^\mu \partial_\mu^p \right) (\gamma \cdot V(x) - g_s \phi(x)) F(x, p). \quad (\text{E.10})$$

Como sabemos, a matriz de Wigner é Hermitiana, portanto a equação anterior deve ser satisfeita separadamente para as partes reais e imaginárias. Trabalhando primeiramente com a parte real:

$$\begin{aligned}
(\gamma \cdot p - M) F(x, p) &= (\gamma \cdot V(x) - g_s \phi(x)) F(x, p) \\
(\gamma \cdot (p - V(x)) - (M - g_s \phi(x))) F(x, p) &= 0 \\
(\gamma \cdot \Pi - M^*) F(x, p) &= 0,
\end{aligned} \tag{E.11}$$

onde usamos a definição de momento cinético $\Pi^\mu = p^\mu - V^\mu(X)$. A parte imaginária fica:

$$(\gamma \cdot \partial + \partial^\nu \partial_\nu^p (\gamma \cdot V(x) + g_s \phi(x))) F(x, p) = 0 \tag{E.12}$$

Vamos agora escrever estas equações em função das componentes da função de Wigner. Tomando do traço da equação (E.11):

$$\begin{aligned}
\Pi^\mu \text{Sp}(\gamma_\mu F(x, p)) &= M^* \text{Sp}(IF(x, p)) \\
\Pi^\mu f_\mu &= M^* f.
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Esta equação é equivalente a (C.13). Sabemos que a equação (3.66), quando aplicada ao caso em estudo toma a seguinte forma:

$$f_\mu = \frac{\Pi_\mu}{M^*} f, \tag{E.14}$$

inserindo esta equação na anterior, obtemos:

$$(\Pi^\mu \Pi_\mu - M^{*2})f = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$\Rightarrow \Pi^2 = M^{*2}. \quad (\text{E.16})$$

Esta é a condição de camada de massa que o sistema obedece. Vale ressaltar que quem obedece a esta relação é o momento cinético e não o canônico.

Agora, tomando o traço da equação (E.12) esperamos obter o análogo a equação de Vlasov clássica, ou seja, a equação de transporte deste sistema quântico. Fazendo isto:

$$\begin{aligned} (\partial^\nu + \partial^\mu \partial_\mu^p V^\nu) \text{Tr}(\gamma_\nu F(x, p)) &= -g_s \partial^\mu \partial_\mu^p \phi(x) \text{Tr}(IF(x, p)) \\ (\partial^\nu + \partial^\mu \partial_\mu^p V^\nu) f_\nu &= -g_s \partial^\mu \partial_\mu^p \phi(x) f \\ (\partial^\nu + \partial^\mu \partial_\mu^p V^\nu) \Pi_\nu \frac{f}{M^*} &= -M^8 (\partial^\mu \partial_\mu^p M^*) \frac{f}{M^*} \\ (\Pi^\mu \partial_\mu + [\Pi^\mu (\partial^\nu V_\mu) + M^* (\partial^\nu M^*)] \partial_\nu^p) \frac{f}{M^*} &= 0 \quad \blacksquare \quad (\text{E.17}) \end{aligned}$$

Onde usamos:

$$[\partial^\nu + \partial^\mu \partial_\mu^p V^\nu, \Pi_\nu] = 0 \quad (\text{E.18})$$

APÊNDICE F – CÁLCULOS DA SEÇÃO 4.2

F.1 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (4.16)

Inserindo (4.15) em (4.12):

$$\begin{aligned} & [\Pi^\mu \partial_\mu + \{ \Pi^\mu (\partial^\nu V_\mu) + M^* (\partial^\nu M^*) \} \partial_{p\nu}] f(x, p) = 0 \\ & \Pi^\alpha \partial_\alpha f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) + \Pi^\alpha (\partial^\nu V_\alpha) \partial_{p\nu} f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) + \\ & \quad + M^* (\partial^\nu M^*) \partial_{p\nu} f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Por partes:

$$\Pi^\alpha \partial_\alpha f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) = \Pi^\alpha \left\{ \partial_\alpha f(x, \Pi^\mu) + \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial V^\nu} f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) \right\}.$$

Mas:

$$\frac{\partial}{\partial V^\nu} = \frac{\partial \Pi^\lambda}{\partial V^\nu} \frac{\partial}{\partial \Pi^\lambda} = -\delta_\nu^\lambda \frac{\partial}{\partial \Pi^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial \Pi^\nu},$$

portanto:

$$\Pi^\alpha \partial_\alpha f(x, \Pi^\mu + V^\mu(x)) = \Pi^\alpha \{ \partial_\alpha f(x, \Pi) - (\partial_\alpha V_\nu) \partial_\Pi^\nu f(x, \Pi) \}. \quad (\text{F.2})$$

Próxima parte:

$$\Pi^\alpha (\partial^\nu V_\alpha) \partial_{p\nu} f(x, \pi^\mu + V^\mu(x)) = \Pi^\alpha (\partial^\nu V_\alpha) \partial_{\Pi\nu} f(x, \Pi), \quad (\text{F.3})$$

onde usamos:

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} = \frac{\partial \Pi^\lambda}{\partial p^\nu} \frac{\partial}{\partial \Pi^\lambda} = \delta_\nu^\lambda \frac{\partial}{\partial \Pi^\lambda} = \frac{\partial}{\partial \Pi^\nu}.$$

De modo semelhante é possível obter o último termo. Assim, inserindo estes resultados na (F.1):

$$\begin{aligned} [\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu (\partial_\mu V_\nu(x)) \partial_\Pi^\nu + \Pi^\mu (\partial_\nu V_\mu(x)) \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial_\nu M^*) \partial_\Pi^\nu] f(x, \Pi) &= 0 \\ [\Pi^\mu \partial_\mu - \Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} \partial_\Pi^\nu + M^* (\partial_\nu M^*) \partial_\Pi^\nu] f(x, \Pi) &= 0 \blacksquare \quad (\text{F.4}) \end{aligned}$$

F.2 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES (4.20) E (4.21)

Iniciando pela quadricorrente:

$$\begin{aligned} \langle J^\mu(x) \rangle &= \text{Sp} \int d^4 \Pi \gamma^\mu F(x, \Pi) \\ &= \int d^4 \Pi \text{Sp}(\gamma^\mu F) \\ &= 4 \int d^4 \Pi f^\mu \\ &= 4 \int d^4 \Pi \frac{M^*}{M^*} \Pi^\mu f \\ \langle J^\mu(x) \rangle &= 4 \int d^4 \Pi \Pi^\mu f. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Para a densidade escalar:

$$\begin{aligned}
\langle \rho_s(x) \rangle &= \langle \tilde{\psi} | \psi \rangle \\
&= \iint d^4 \Pi d^4 R e^{-i \Pi \cdot R} \langle \tilde{\psi}(x+R/2) | \psi(x-R/2) \rangle \\
&= \int d^4 \Pi \operatorname{Sp}(F(x, p)) \\
\langle \rho_s(x) \rangle &= 4 \int d^4 \Pi M^* f.
\end{aligned}$$

As constantes de normalização precisam ser mudadas para concordarem com resultados obtidos por outras técnicas.

F.3 CÁLCULO DOS COMUTADORES (4.25) E (4.26)

O primeiro comutador (4.25) é reescrito abaixo com algumas mudanças que o tornam mais prático para os cálculos que seguem:

$$[\Pi^\mu \partial_\mu + (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu, \theta(\Pi_0)] f'(x, \Pi). \quad (\text{F.6})$$

Por partes:

$$\begin{aligned}
[\Pi^\mu \partial_\mu, \theta(\Pi_0)] f'(x, \Pi) &= \Pi^\mu \partial_\mu (\theta(\Pi_0)) f'(x, \Pi) - \theta(\Pi_0) \Pi^\mu \partial_\mu f'(x, \Pi) \\
[\Pi^\mu \partial_\mu, \theta(\Pi_0)] f'(x, \Pi) &= 0.
\end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Próxima parte:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu, \theta(\Pi_0) \right] f'(x, \Pi) = \\
& = \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu \left(\theta(\Pi_0) f'(x, \Pi) \right) + \\
& \quad - \theta(\Pi_0) \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu f'(x, \Pi) \\
& = \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu \left(\theta(\Pi_0) \right) f'(x, \Pi) + \\
& \quad + \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \theta(\Pi_0) \partial_\Pi^\nu \left(f'(x, \Pi) - f'(x, \Pi) \right) \\
& = \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu 0} + M^* (\partial_0 M^*) \right) \delta(\Pi_0) \cdot \frac{\Pi_0 - \sqrt{\Pi^2 + M^{*2}}}{\Pi_0} f(\tilde{x}, \vec{\Pi} = 0) \\
& \left[\left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu, \theta(\Pi_0) \right] f'(x, \Pi) = 0 \quad .(F.8)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\left[\Pi^\mu \partial_\mu + \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu, \theta(\Pi_0) \right] f'(x, \Pi) = 0 \quad \blacksquare \quad (F.9)$$

O segundo comutador também é reescrito:

$$\left[\Pi^\mu \partial_\mu + \left(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*) \right) \partial_\Pi^\nu, \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \right] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}). \quad (F.10)$$

Por partes:

$$\begin{aligned}
& [\Pi^\mu \partial_\mu, \delta(\Pi^2 - M^{*2})] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = \\
& = \Pi^\mu \partial_\mu \left(\delta(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \right) - \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \Pi^\mu \partial_\mu \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& = \Pi^\mu \partial_\mu \left(\delta(\Pi^2 - M^{*2}) \right) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) + \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \Pi^\mu \partial_\mu \left(\tilde{f}(x, \vec{\Pi}) - \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \right) \\
& = \Pi^\mu \frac{\partial M^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial M^*} \left(\delta(\Pi^2 - M^{*2}) \right) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& = -2\Pi^\mu M^* (\partial_\mu M^*) \delta'(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}). \tag{F.11}
\end{aligned}$$

Próxima parte:

$$\begin{aligned}
& [(-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu, \delta(\Pi^2 - M^{*2})] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = \\
& = (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu \left(\delta(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \right) + \\
& \quad - \delta(\Pi^2 - M^{*2}) (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& = (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu \left(\delta(\Pi^2 - M^{*2}) \right) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) + \\
& \quad + (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \delta(\Pi^2 - M^{*2}) \partial_\Pi^\nu \left(\tilde{f}(x, \vec{\Pi}) - \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \right) \\
& = (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) 2\Pi^\nu \delta'(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& = (-2\Pi^\mu \Pi^\nu \Omega_{\mu\nu} + 2\Pi^\nu M^* (\partial_\nu M^*)) \delta'(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}). \tag{F.12}
\end{aligned}$$

Usando (F.11) e (F.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
& [\Pi^\mu \partial_\mu + (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu, \delta(\Pi^2 - M^{*2})] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = \\
& = (-2\Pi^\mu \Pi^\nu \Omega_{\mu\nu} + 2\Pi^\nu M^* (\partial_\nu M^*) - 2\Pi^\mu M^* (\partial_\mu M^*)) \delta'(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& = -2\Pi^\mu \Pi^\nu \Omega_{\mu\nu} \delta'(\Pi^2 - M^{*2}) \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) \\
& [\Pi^\mu \partial_\mu + (-\Pi^\mu \Omega_{\mu\nu} + M^* (\partial_\nu M^*)) \partial_\Pi^\nu, \delta(\Pi^2 - M^{*2})] \tilde{f}(x, \vec{\Pi}) = 0 \blacksquare \tag{F.13}
\end{aligned}$$

No último passo usamos o fato de termos um termo simétrico multiplicando um termo antissimétrico.